

# Асимптотическая теория представлений II.

## Записки лекций

Григорий Ольшанский. Запись Леонида Петрова\*

Версия от 13 ноября 2012 г.

**ВНИМАНИЕ!** Данный текст находится в стадии активного написания, поэтому в нем может неожиданно измениться все, что угодно.

### Содержание

1	Двойственность Шура–Вейля	2
2	Алгоритмы Шенстеда и Робинсона–Шенстеда	9
3	Формулы для размерности	22
4	Мера Планшереля	33
5	Разностные операторы и корреляционное ядро	42
6	Разностные операторы и исследование меры Планшереля	52
7	Предельные формы случайных диаграмм по мерам $P_N^{(n)}$	63
8	Орбитальный интеграл	70
9	Сжатие групп и алгебр Ли	78
10	Тотальная положительность и эргодические меры	88
11	Классификация эргодических мер на $H$	95
12	Строение эргодических мер	102
13	Заключение	110

---

\*lenia.petrov@gmail.com

# 1 Двойственность Шура–Вейля

Двойственность Шура–Вейля — один из старейших сюжетов теории представлений, однако, он до сих пор порождает новые интересные результаты (в основном, за счет рассмотрения с ним связанных вероятностных моделей).

## 1.1 $(\mathfrak{S}(n), GL(N))$ -бимодуль

Пусть  $n$  и  $N$  — два натуральных числа. Они будут нашими основными параметрами. Через  $\mathfrak{S}(n)$  будем обозначать симметрическую группу степени  $n$ , а через  $GL(N) = GL(N, \mathbb{C})$  — группу обратимых матриц размера  $N \times N$  с комплексными элементами.

Пусть  $V = \mathbb{C}^N$ , рассмотрим пространство  $V^{\otimes n}$ . В нем действуют две указанные группы:

- Группа  $\mathfrak{S}(n)$  действует перестановкой компонент. Более подробно, перестановка  $s \in \mathfrak{S}(n)$  действует на разложимый тензор  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  как

$$s(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{s^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{s^{-1}(n)}.$$

Легко проверить, что так определяется именно *левое* действие группы  $\mathfrak{S}(n)$ .

- Матрица  $X \in GL(N)$  действует в  $V^{\otimes n}$  как  $X^{\otimes n}$  (то есть, покомпонентно).

Ясно, что указанные действия между собой коммутируют. Поэтому  $V^{\otimes n}$  есть  $(\mathfrak{S}(n), GL(N))$ -бимодуль.

Рассмотрим алгебру операторов  $\text{End}(V^{\otimes n})$ , а в ней — две следующие ассоциативные подалгебры с единицей:

- $\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)} = \text{span} \{\text{операторы из } \mathfrak{S}(n)\}$ ;<sup>1</sup>
- $\mathfrak{a}_{GL(N)} = \text{span} \{\text{операторы из } GL(N)\}$ .

**Определение 1.1.** Пусть  $\mathfrak{a} \subset \text{End}(V^{\otimes n})$  — ассоциативная подалгебра с единицей. Через  $\mathfrak{a}'$  обозначим *централизатор* (или *коммутант*) алгебры  $\mathfrak{a}$  в  $\text{End}(V^{\otimes n})$ , по определению состоящий из операторов, коммутирующих со всеми операторами из  $\mathfrak{a}$ .

**Предложение 1.2.**  $(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)})' = \mathfrak{a}_{GL(N)}$ .

*Доказательство.* 1. Ясно, что  $\text{End}(V^{\otimes n}) = (\text{End}(V))^{\otimes n}$ .

2.  $(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)})' = S^n(\text{End}(V))$ , то есть,  $(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)})' \subset (\text{End}(V))^{\otimes n}$  есть в точности пространство симметрических тензоров. Это утверждение легко получается из определений.

<sup>1</sup>Здесь и далее  $\text{span} \{\dots\}$  означает линейную оболочку.

3. Пусть  $S^n E$  для любого пространства  $E$  обозначает пространство симметрических тензоров над  $E$ . Тогда

$$S^n E = \text{span} \{X^{\otimes n} : X \in E\}.$$

Это так называемый *принцип поляризации*.

Ясно, что  $X \otimes \cdots \otimes X$  — симметрический тензор для всех  $X \in E$ . Также из определения ясно, что пространство всех симметрических тензоров натянуто на тензоры вида

$$\sum_{s \in \mathfrak{S}(n)} s(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n).$$

Рассмотрим тензор  $(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n)^{\otimes n} \in \text{span} \{X^{\otimes n} : X \in E\}$ . Можно понять, что<sup>2</sup>

$$\sum_{s \in \mathfrak{S}(n)} s(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n) = [\lambda_1 \dots \lambda_n] \{(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n)^{\otimes n}\}.$$

4. Пусть теперь  $E = \text{End}(V)$  в п.3. Тогда

$$(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)})' = \text{span} \{X^{\otimes n} : X \in \text{End}(V)\}. \quad (1.1)$$

Нам же надо было показать, что

$$(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)})' = \text{span} \{X^{\otimes n} : X \in GL(V) = GL(N)\}. \quad (1.2)$$

Так как любую матрицу можно приблизить обратимой, (1.2) следует из (1.1). □

## 1.2 Матричные алгебры

Излагаемый здесь материал есть, например, в книге [Вин01].

Пусть  $E$  — конечномерное пространство,  $\mathfrak{a} \subset \text{End}(E)$  — ассоциативная алгебра с единицей. Говорят, что  $E$  является  $\mathfrak{a}$ -модулем, или что задано представление алгебры  $\mathfrak{a}$  в  $E$ .

**Определение 1.3.** • Алгебра  $\mathfrak{a} \subset \text{End}(V)$  *полупроста*, если  $E$  — полупростой  $\mathfrak{a}$ -модуль, то есть, любой подмодуль в нем выделяется как прямое слагаемое (на языке теории представлений это называется вполне приводимостью).

- Алгебра  $\mathfrak{a} \subset \text{End}(V)$  *неприводима*, если в  $E$  нет собственных (отличных от нулевого и от всего  $E$ )  $\mathfrak{a}$ -инвариантных подпространств.

---

<sup>2</sup>Здесь и далее [AAA] {BBB} означает коэффициент при AAA в выражении BBB.

- Алгебра  $\mathfrak{a} \subset \text{End}(V)$  *примарна*, если пространство  $E$  представляется в виде суммы эквивалентных неприводимых модулей.

**Предложение 1.4.** Пусть  $\mathfrak{a} \subset \text{End}(V)$  — полупростая ассоциативная алгебра с единицей. Тогда  $E$  однозначно разлагается в прямую сумму  $E = \bigoplus_i E_i$  примарных  $\mathfrak{a}$ -модулей.

Доказательство этого предложения содержится в стандартном курсе линейной алгебры, см., напр., [Вин01].

**Замечание 1.5.** Далее каждый примарный модуль  $E_i$  разлагается (уже не каноническим образом) в прямую сумму неприводимых. Кроме того, разным  $i$  отвечают разные неприводимые модули.

Предложение 1.4 утверждает, что в  $E$  существует подходящий базис, в котором алгебра  $\mathfrak{a}$  состоит из всех операторов вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & A_1 & & & & \\ & & & A_2 & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & A_2 & \\ \dots & & & \dots & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где каждый блок из одинаковых операторов соответствует примарному слагаемому  $E_i$ .

Другими словами,  $\mathfrak{a}$  есть прямая сумма матричных алгебр,

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_i \text{End}(V_i).$$

Пространство  $E$ , в свою очередь, можно представить в виде

$$E = \bigoplus_i V_i \otimes W_i,$$

где  $W_i$  — вспомогательные пространства, такие, что размерность  $\dim W_i$  равна кратности соответствующей неприводимой компоненты в примарной алгебре  $E_i$ . Таким образом,

$$\mathfrak{a} = \left\{ \bigoplus_i A_i \otimes \mathbf{1}_{W_i} : A_i \in \text{End}(V_i) \right\},$$

где  $\mathbf{1}_{W_i}$  — тождественный оператор в пространстве  $W_i$ .

Сформулируем следующий частный случай теоремы Бернсайда:

**Теорема 1.6** (см., напр., [LR04]). Если алгебра  $\mathfrak{a}$  неприводима, то  $\mathfrak{a} = \text{End}(E)$ .

Перейдем к описанию коммутанта  $\mathfrak{a}'$  полупростой алгебры  $\mathfrak{a} \subset \text{End}(E)$ .

**Предложение 1.7.** Пусть  $\mathfrak{a} \subset \text{End}(E)$  — полупростая алгебра с единицей. Тогда

$$\mathfrak{a}' = \left\{ \bigoplus_i \mathbf{1}_{V_i} \otimes B_i : B_i \in \text{End}(W_i) \right\}.$$

*Доказательство.* Сперва надо рассмотреть частный случай  $\mathfrak{a} = \text{End}(V)$ , и  $E = V \oplus W$ . Утверждение предложения в этом случае следует из леммы Шура и того, что операторы  $A \otimes \mathbf{1}_W$  и  $\mathbf{1}_V \otimes B$  коммутируют для всех  $A \in \text{End}(V)$  и  $B \in \text{End}(W)$ .

Общий случай легко свести к уже рассмотренному.  $\square$

**Предложение 1.8** (О бикоммутанте). Пусть  $\mathfrak{a} \subset \text{End}(E)$  — полупростая алгебра с единицей. Тогда

$$(\mathfrak{a}')' = \mathfrak{a}.$$

*Доказательство.* Предложение следует из симметричности описания алгебры и ее коммутанта (предложение 1.7).  $\square$

### 1.3 Неприводимые представления $\mathfrak{S}(n)$ и $GL(N)$

Применим утверждения §1.2 к нашему  $(\mathfrak{S}(n), GL(N))$ -бимодулю  $E = V^{\otimes n}$ , где  $V = \mathbb{C}^N$ . Алгебра  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}(n)}$  полупроста, так как натянута на представление конечной группы, которое вполне приводимо.<sup>3</sup> Таким образом, алгебра  $\mathfrak{a}_{GL(N)}$  также полупроста. Значит, можно записать следующее разложение пространства  $V^{\otimes n}$ :

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}^{\mathfrak{S}(n)} \otimes V_{\lambda}^{GL(N)}. \quad (1.3)$$

Здесь сумма ведется по некоему (пока абстрактному) набору индексов  $\lambda$ ,  $V_{\lambda}^{\mathfrak{S}(n)}$  и  $V_{\lambda}^{GL(N)}$  — неприводимые представления соответственно  $\mathfrak{S}(n)$  и  $GL(N)$ , отвечающие этому индексу  $\lambda$ .

Другими словами, пусть  $\widehat{\mathfrak{S}(n)}$  — множество всех неприводимых представлений  $\mathfrak{S}(n)$ , а  $\widehat{GL(N)}$  — множество тех неприводимых представлений  $GL(N)$ , которые можно извлечь из тензоров (это так называемые *полиномиальные* представления). Формула (1.3) показывает, что в  $\widehat{\mathfrak{S}(n)}$  и  $\widehat{GL(N)}$  существуют подмножества, которые можно параметризовать одним и тем же набором индексов  $\lambda$ . Между представлениями  $\mathfrak{S}(n)$  и  $GL(N)$  в этих подмножествах существует биективное соответствие. Элементы  $\mathfrak{S}(n)$  действуют как  $A_{\lambda} \otimes \mathbf{1}_{V_{\lambda}^{GL(N)}}$ , а элементы  $GL(N)$  — как  $\mathbf{1}_{V_{\lambda}^{\mathfrak{S}(n)}} \otimes B_{\lambda}$ . Кроме того, так как размерность  $V^{\otimes n}$  конечна, множество индексов  $\{\lambda\}$  также конечно.

Чтобы охарактеризовать множество индексов  $\{\lambda\}$  более точно, необходимо использовать теорию представлений. Предположим, что нам известны

<sup>3</sup>Эта вполне приводимость следует из того, что любое представление конечной группы над  $\mathbb{C}$  унитаризуемо.

некоторые факты о представлениях группы  $GL(N)$ , и получим информацию о характерах группы  $\mathfrak{S}(n)$ .

Итак, пусть  $T_s^{\mathfrak{S}(n)}$  — оператор представления  $\mathfrak{S}(n)$  в  $V^{\otimes n}$ , где  $s \in \mathfrak{S}(n)$ . Пусть  $T_g^{GL(N)}$  — оператор представления  $GL(N)$  в  $V^{\otimes n}$ , где  $g \in GL(N)$ . В пространстве  $V^{\otimes n}$  задано двойное представление прямого произведения  $\mathfrak{S}(n) \times GL(N)$ :

$$T_{s,g} = T_s^{\mathfrak{S}(n)} T_g^{GL(N)} = T_g^{GL(N)} T_s^{\mathfrak{S}(n)}, \quad (s, g) \in \mathfrak{S}(n) \times GL(N)$$

(напомним, что операторы, отвечающие  $\mathfrak{S}(n)$  и  $GL(N)$ , коммутируют).

**Определение 1.9.** Напомним, что характер представления  $T$  — это функция на группе  $\chi(\cdot) = \text{Tr } T(\cdot)$ . Характер постоянен на классах сопряженности в группе.

Напомним описание классов сопряженности в  $GL(N)$  и в  $\mathfrak{S}(n)$ :

- Почти всякая матрица  $g \in GL(N)$  диагонализуема, поэтому классы сопряженности в  $GL(N)$  параметризуются точками  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ , причем порядок  $x_i$  не важен.
- Каждый класс сопряженности в  $\mathfrak{S}(n)$  состоит из перестановок, имеющих одну и ту же цикловую структуру. Цикловая структура определяется разбиением  $\rho$  числа  $n$  (записывается  $\rho \vdash n$ ).<sup>4</sup>

Из формулы (1.3) следует фундаментальная формула для характеров:

$$\text{Tr } (T_{s,g}) = \sum_{\lambda} \chi_{\lambda}^{\mathfrak{S}(n)}(s) \chi_{\lambda}^{GL(N)}(g). \quad (1.4)$$

Так как характер постоянен на классах сопряженности, можно считать, что  $s$  задается разбиением  $\rho \vdash n$ , а  $g = \text{diag } (x_1, \dots, x_N)$ .

Сформулируем те факты о характерах  $GL(N)$ , которые мы предполагаем известными и будем использовать.

**Предложение 1.10.** *Характеры неприводимых полиномиальных представлений группы  $GL(N)$  суть полиномы Шура, которые индексируются разбиениями  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  длины  $N$ .<sup>5</sup> В разложении  $V^{\otimes n}$  на неприводимые представления участвуют только те представления, для которых  $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_N = n$ .*

<sup>4</sup>Разбиение числа  $n$  — это последовательность вида  $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_{\ell} > 0$ , где  $\rho_i \in \mathbb{Z}$ ,  $\sum_i \rho_i = n$ . Число  $\ell = \ell(\rho)$  называется длиной разбиения, а число  $n = |\rho|$  — весом разбиения.

<sup>5</sup>Напомним, что полиномы Шура определяются как

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\det (x_j^{\lambda_i + N - i})_{i,j=1,\dots,N}}{V(x_1, \dots, x_N)},$$

где  $V_N(x_1, \dots, x_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)$  — определитель Вандермонда.

Разбиения изображаются диаграммами Юнга [Мак84, Гл. I, §1]. Через  $\mathbb{Y}$  обозначим множество всех диаграмм Юнга. Через  $\mathbb{Y}(N)$  — множество диаграмм Юнга  $\lambda$  с  $\ell(\lambda) \leq N$ . Через  $\mathbb{Y}_n$  — множество диаграмм Юнга  $\lambda$  с  $|\lambda| = n$ . И наконец, обозначим  $\mathbb{Y}_n(N) := \mathbb{Y}(N) \cap \mathbb{Y}_n$ .

Из предложения 1.10 следует:

**Предложение 1.11.** *В формулах (1.3) и (1.4) множество индексов  $\{\lambda\}$  на самом деле есть множество  $\mathbb{Y}_n(N)$  диаграмм Юнга длины  $\leq N$  с  $n$  клетками.*

Из (1.4) и нашего знания характеров  $GL(N)$  можно получить информацию о характерах  $\mathfrak{S}(n)$ . Сначала вычислим левую часть (1.4). Пусть<sup>6</sup>

$$p_k(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x_i^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим  $p_\rho := p_{\rho_1} p_{\rho_2} \dots p_{\rho_{\ell(\rho)}}$ , где  $\rho$  — любое разбиение.

**Лемма 1.12.** *Пусть цикловая структура  $s \in \mathfrak{S}(n)$  задается разбиением  $\rho \vdash n$ , а  $g \in GL(N)$  имеет вид  $g = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$ . Тогда*

$$\text{Tr}(T_{s,g}) = p_\rho(x_1, \dots, x_N).$$

*Доказательство.* Обозначим через  $e_1, \dots, e_N$  стандартный базис в  $\mathbb{C}^N$ . Базисом в  $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$  являются тензорные мономы вида  $e_{\bar{a}} := e_{a(1)} \otimes \dots \otimes e_{a(n)}$ . Выберем в  $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$  скалярное произведение, по отношению к которому базис  $\{e_{\bar{a}}\}$  является ортонормальным. Тогда

$$\text{Tr}(T_{s,g}) = \sum_{\bar{a}} (T_{s,g} e_{\bar{a}}, e_{\bar{a}}).$$

Сперва рассмотрим частный случай, когда  $\rho = (n)$ , то есть,  $s \in \mathfrak{S}(n)$  — цикл длины  $n$ . Для того, чтобы  $(T_{s,g} e_{\bar{a}}, e_{\bar{a}}) \neq 0$ , необходимо, чтобы  $a(1) = a(2) = \dots = a(n)$ . Оператор  $T_g^{GL(N)}$  действует на  $e_{\bar{a}}$  умножением каждого вектора  $e_i$  на  $x_i$ . Поэтому имеем

$$(T_{s,g} e_{\bar{a}}, e_{\bar{a}}) = \sum_{i=1}^N (T_g^{GL(N)} e_i^{\otimes n}, e_i^{\otimes n}) = x_1^n + \dots + x_N^n = p_n(x_1, \dots, x_N).$$

В общем случае (когда  $\rho \vdash n$  — произвольное разбиение) разобьем  $[n] := \{1, \dots, n\}$  на части  $[n] = \sqcup C_j$ , так, что  $s$  переставляет элементы в каждой части  $C_j$  по циклу. Здесь  $s \in \mathfrak{S}(n)$  имеет цикловую структуру  $\rho$ , и  $|C_j| = \rho_j$ . Повторяя рассуждения выше для каждой части  $C_j$ , приходим к нужному произведению сумм Ньютона.  $\square$

<sup>6</sup>Функции  $p_k$  называют суммами Ньютона.

Отсюда получаем следствие — таблицу характеров группы  $\mathfrak{S}(n)$ :

$$p_\rho(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} \chi_\rho^\lambda \cdot s_\lambda(x_1, \dots, x_N). \quad (1.5)$$

Здесь  $s_\lambda$  — полиномы Шура, а  $\chi_\rho^\lambda$  — значение характера неприводимого представления группы  $\mathfrak{S}(n)$ , отвечающего диаграмме Юнга  $\lambda$ , на классе сопряженности в  $\mathfrak{S}(n)$ , отвечающем разбиению  $\rho$ . Другими словами,

$$\chi_\rho^\lambda := \chi_\lambda^{\mathfrak{S}(n)}(s),$$

где  $s$  имеет цикловую структуру  $\rho$ .

Отметим, что при изменении  $N$  метка  $\lambda$  остается за тем же представлением симметрической группы  $\mathfrak{S}(n)$ . При  $N \geq n$  формула (1.5) дает все представления  $\mathfrak{S}(n)$ , так как в  $V^{\otimes n}$  содержится регулярное представление  $\mathfrak{S}(n)$ . Действительно, пусть  $N = n$ , рассмотрим тензорный моном  $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ , и его  $\mathfrak{S}(n)$ -орбиту. Это и будет регулярное представление  $\mathfrak{S}(n)$ . Таким образом, мы получаем:

**Теорема 1.13** (Фробениус). *1. Неприводимые представления  $\mathfrak{S}(n)$  параметризуются диаграммами Юнга  $\lambda$  с  $n$  клетками.*

*2. Таблица характеров  $\mathfrak{S}(n)$  имеет вид  $\chi_\rho^\lambda = [s_\lambda] \{p_\rho\}$ .*

Отметим, что сам Фробениус доказывал эту теорему без использования двойственности Шура–Вейля.

Вообще говоря, в формуле (1.5) можно считать, что число  $N$  неопределенно велико, то есть, перейти к *симметрическим функциям* (см. [Мак84, Гл. I, §2]). Пусть  $\Lambda$  — алгебра симметрических функций. Ее можно понимать как подалгебру в алгебре формальных степенных рядов  $\mathbb{R}[[x_1, x_2, \dots]]$ , состоящую из рядов, которые имеют ограниченную степень,<sup>7</sup> и симметричны по  $x_1, x_2, \dots$ .

Набор функций Шура  $\{s_\lambda\}$ , где  $\lambda$  пробегает все диаграммы Юнга, образует линейный базис в алгебре симметрических функций  $\Lambda$ . Набор  $\{p_\rho\}$ , где  $\rho$  пробегает все разбиения, также образует линейный базис в  $\Lambda$ . Теорема 1.13(2) утверждает, что таблица характеров группы  $\mathfrak{S}(n)$  — это таблица коэффициентов перехода от базиса  $\{p_\rho\}$  к базису  $\{s_\lambda\}$ . С использованием симметрических функций можно записать

$$\chi_\rho^\lambda = [s_\lambda] \{p_\rho\}, \quad p_\rho = \sum_{\lambda: |\lambda|=|\rho|} \chi_\rho^\lambda s_\lambda.$$

## 1.4 Вероятностная модель

Оказывается, двойственность Шура–Вейля приводит к некоторым вероятностным моделям.

<sup>7</sup>То есть, степени всех мономов в степенном ряду равномерно ограничены.

Мы знаем, что

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} V_\lambda^{\mathfrak{S}(n)} \otimes V_\lambda^{GL(N)}.$$

Выпишем соответствующую формулу для размерностей:

$$\dim V^{\otimes n} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} \dim V_\lambda^{\mathfrak{S}(n)} \dim V_\lambda^{GL(N)}.$$

Эта формула позволяет определить вероятностную меру  $P_N^{(n)}(\lambda)$  на множестве диаграмм Юнга  $\mathbb{Y}_n(N)$  с  $n$  клетками и имеющих длину  $\leq N$ . Ясно, что  $\dim V^{\otimes n} = N^n$ . Обозначим  $\dim V_\lambda^{\mathfrak{S}(n)}$  через  $\dim \lambda$ , а  $\dim V_\lambda^{GL(N)}$  — через  $\text{Dim}_N \lambda$ .<sup>8</sup> Таким образом,

$$N^n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} \dim \lambda \cdot \text{Dim}_N \lambda. \quad (1.6)$$

Определим вероятностную меру  $P_N^{(n)}$  на  $\mathbb{Y}_n(N)$  следующим образом:

$$P_N^{(n)}(\lambda) := \frac{\dim \lambda \cdot \text{Dim}_N \lambda}{N^n}.$$

Отметим, что для  $\dim \lambda$  и  $\text{Dim}_N \lambda$  существует несколько явных выражений, которые мы будем позже использовать.

В заключение отметим, что у тождества (1.6) существует и чисто комбинаторное биективное доказательство. Мы лишь укажем комбинаторный смысл тождества (1.6). А именно,  $\dim \lambda = |\text{SYT}(\lambda)|$  — это число стандартных таблиц формы  $\lambda$ , а  $\text{Dim}_N \lambda = |\text{SSYT}(\lambda; N)|$  — число полустандартных таблиц формы  $\lambda$ , заполненных числами  $\leq N$  (см., напр., [Фул06]). Таким образом, (1.6) утверждает, что

$$N^n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} |\text{SYT}(\lambda)| \cdot |\text{SSYT}(\lambda; N)|. \quad (1.7)$$

Комбинаторное доказательство этой формулы дает алгоритм Шенстеда (см., напр., [Фул06]), который мы рассмотрим в следующей лекции.

## 2 Алгоритмы Шенстеда и Робинсона–Шенстеда

Конечная цель данной лекции — дать комбинаторное доказательство формулы

$$N^n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} \dim \lambda \cdot \text{Dim}_N \lambda, \quad (2.1)$$

<sup>8</sup>Размерность  $\dim \lambda$  зависит от  $n$  через число клеток в диаграмме  $\lambda$ , но не зависит от  $N$ . В свою очередь, размерность  $\text{Dim}_N \lambda$  зависит как от  $n$ , так и от «внешнего» параметра  $N$ .

где  $\dim \lambda$  — размерность неприводимого представления  $\mathfrak{S}(n)$ , соответствующего диаграмме  $\lambda$ , а  $\text{Dim}_N \lambda$  — размерность неприводимого представления  $GL(N)$ , соответствующего диаграмме  $\lambda$ . Формула (2.1) вытекает из двойственности Шура-Вейля, рассмотренной в предыдущей лекции. Мы запишем эту формулу в виде (1.7) и дадим ее биективное доказательство.

## 2.1 Правило ветвления многочленов Шура. Схемы Гельфанда–Цетлина

Напомним правило ветвления многочленов Шура (более подробно см. [Оль09, Лекция 1]). Пусть  $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$  — многочлен Шура, где  $\lambda$  — диаграмма Юнга. Многочлен  $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$  является симметрическим по  $x_1, \dots, x_N$ . Зафиксировав  $x_N$ , получим симметрический многочлен от  $x_1, \dots, x_{N-1}$ . Его снова можно разложить по симметрическим многочленам Шура от переменных  $x_1, \dots, x_{N-1}$  (такие многочлены образуют базис в пространстве симметрических многочленов). Полученное разложение называется *правилом ветвления*:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} s_\mu(x_1, \dots, x_{N-1}) x_N^{\sum \lambda_i - \sum \mu_j}. \quad (2.2)$$

Здесь сумма ведется по всем  $\mu$ , которые перемежаются с  $\lambda$ :

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N-1} \geq \mu_{N-1} \geq \lambda_N. \quad (2.3)$$

Правило ветвления может быть доказано по определению многочленов Шура (как отношения соответствующих детерминантов).

**Замечание 2.1.** В условии перемежаемости (2.3) предполагается, что мы дополняем разбиение  $\lambda$  нулями до длины  $N$ . Ясно, что длина  $\lambda$  не может быть больше, чем  $N$ , так как иначе  $s_\lambda(x_1, \dots, x_N) \equiv 0$ .

Вообще говоря, в формуле (2.2), а также в определении размерности  $\text{Dim}_N \lambda$ , удобно считать  $\lambda$  не разбиением, а неотрицательной *сигнатурой* длины  $N$ . Сигнатура длины  $N$  — это последовательность невозрастающих целых чисел:

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}.$$

Множество сигнатур длины  $N$  обозначим через  $\text{Sign}(N)$ . Через  $\text{Sign}_+(N) \subset \text{Sign}(N)$  обозначим множество неотрицательных сигнатур, то есть, таких, что  $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Ясно, что  $\text{Sign}_+(N) = \mathbb{Y}(N)$ .<sup>9</sup> Отношение перемежаемости (2.3) переносится и на сигнатуры.

**Определение 2.2.** *Схема Гельфанда–Цетлина* — это последовательность перемежающихся сигнатур

$$\lambda^{(1)} \prec \lambda^{(2)} \prec \dots \prec \lambda^{(N)},$$

<sup>9</sup>Множество  $\text{Sign}(N)$  параметризует неприводимые представления группы  $GL(N)$ , а  $\text{Sign}_+(N) \subset \text{Sign}(N)$  параметризует полиномиальные представления  $GL(N)$ , которые получаются из тензоров (см. двойственность Шура–Вейля).

где  $\lambda^{(i)} \in \text{Sign}(i)$ .

Схемы Гельфанда–Цетлина удобно изображать в виде следующей пирамиды (для удобства приведем пример с  $N = 4$ ):

$$\begin{array}{cccc}
 \lambda_1^{(4)} & & \lambda_2^{(4)} & & \lambda_3^{(4)} & & \lambda_4^{(4)} \\
 & \lambda_1^{(3)} & & \lambda_2^{(3)} & & \lambda_3^{(3)} & \\
 & & \lambda_1^{(2)} & & \lambda_2^{(2)} & & \\
 & & & \lambda_1^{(1)} & & & 
 \end{array}$$

Если в схеме Гельфанда–Цетлина зафиксировать верхнюю строчку, то число возможных заполнений пирамиды конечно.

С помощью схем Гельфанда–Цетлина можно дать комбинаторную формулу для многочленов Шура. Она получается, если к  $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ <sup>10</sup> применить  $N$  раз правило ветвления, отделяя поочередно  $x_N, x_{N-1}, \dots, x_1$ . В результате  $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$  раскладывается в сумму мономов следующим образом:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau} x_1^{k_1(\tau)} \dots x_N^{k_N(\tau)}, \quad (2.4)$$

где сумма ведется по всем схемам Гельфанда–Цетлина  $\tau = (\lambda^{(1)} \prec \dots \prec \lambda^{(N)} = \lambda)$  с фиксированной верхней строчкой  $\lambda \in \text{Sign}(N)$ , и

$$\begin{aligned}
 k_N(\tau) &= \sum \lambda_i^{(N)} - \sum \lambda_j^{(N-1)}, \\
 k_{N-1}(\tau) &= \sum \lambda_j^{(N-1)} - \sum \lambda_l^{(N-2)}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 k_1(\tau) &= \lambda_1^{(1)}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что кратность вхождения отдельных мономов в сумму (2.4) может быть больше единицы.

Так как  $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$  — характер неприводимого представления  $GL(N)$ , соответствующего сигнатуре  $\lambda$ , то  $\text{Dim}_N \lambda = s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_N)$ . Из (2.4) получим:

**Следствие 2.3.** Для  $\lambda \in \text{Sign}(N)$  размерность  $\text{Dim}_N \lambda$  равна числу схем Гельфанда–Цетлина с фиксированной верхней строчкой  $\lambda^{(N)} = \lambda$ .

## 2.2 Полустандартные таблицы Юнга и размерности неприводимых полиномиальных представлений $GL(N)$

От рассмотрения сигнатур (как это было в конце предыдущего подраздела) перейдем к неотрицательным сигнатурам. Ясно, что неотрицательные

<sup>10</sup>Если  $\lambda$  — произвольная сигнатура, то  $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$  — лорановский многочлен Шура, он определяется по той же формуле (через отношение двух определителей), что и обычный многочлен Шура. Отметим, что если сигнатура  $\lambda$  содержит отрицательные части, то  $s_\lambda$  уже не является многочленом от  $x_1, \dots, x_N$ .

сигнатуры длины  $N$  можно отождествить с диаграммами Юнга длины не больше  $N$ , то есть,  $\text{Sign}_+(N) = \mathbb{Y}(N)$ .

**Определение 2.4.** Пусть  $\lambda$  — диаграмма Юнга. *Полустандартной таблицей* формы  $\lambda$  со значениями в  $[N] := \{1, \dots, N\}$  называется функция  $T: \square \rightarrow [N]$ , где  $\square \in \lambda$ , то есть, заполнение клеток диаграммы  $\lambda$  числами из  $[N]$ , при котором числа нестрого возрастают по строчкам и строго возрастают по столбцам.

Например, если  $\lambda = (4, 3, 1)$  и  $N = 5$ , то одна из полустандартных таблиц формы  $\lambda$  со значениями из  $[N]$  имеет вид:

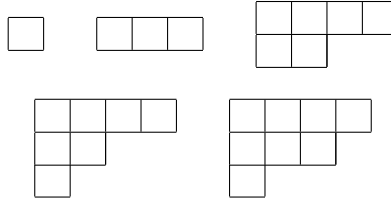
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 5 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.5)$$

Через  $SSYT(\lambda; N)$  обозначим множество всех полустандартных таблиц формы  $\lambda$  со значениями в  $[N]$ . Это множество непусто, только если  $\ell(\lambda) \leq N$ .

**Предложение 2.5.** Пусть  $\lambda \in \mathbb{Y}(N)$ . Существует биекция между множеством  $SSYT(\lambda; N)$  и множеством схем Гельфанда–Цетлина с фиксированной верхней строчкой  $\lambda^{(N)} = \lambda$ .

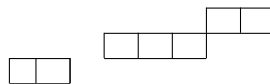
*Доказательство.* Идея доказательства состоит в следующем. По полустандартной таблице формы строится последовательность диаграмм Юнга  $\lambda^{(i)}$  (которые входят в схему Гельфанда–Цетлина  $\tau = (\lambda^{(1)} \prec \dots \prec \lambda^{(N)})$ ), где  $\lambda^{(i)}$  — поддиаграмма в  $\lambda$ , состоящая из всех клеток  $\square$ , в которых в полустандартной таблице стоит число  $\leq i$ .

Например, таблице (2.5) соответствует следующая последовательность диаграмм:



Более строго, условие полустандартности можно переформулировать следующим образом. Обозначим через  $\lambda^{(i)}$  поддиаграмму в  $\lambda$ , состоящую из всех клеток  $\square$ , в которых в полустандартной таблице стоит число  $\leq i$ . Рассмотрим *косую диаграмму Юнга*  $\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$ , то есть, множество клеток в полустандартной таблице, в которых стоит число  $i$ . Условие полустандартности состоит в том, что для всех  $i$  косая диаграмма  $\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$  представляет собой *горизонтальную полосу* — такую косую диаграмму, в которой в каждом столбце стоит не более одной клетки.<sup>11</sup>

<sup>11</sup>Пример горизонтальной полосы:



Таким образом, каждая полустандартная таблица есть последовательность диаграмм Юнга, в которой каждая следующая диаграмма получается из предыдущей приклеиванием горизонтальной полоски. Легко понять, что это условие равносильно перемежаемости диаграмм Юнга в этой последовательности. Таким образом, данная последовательность диаграмм является схемой Гельфанда–Цетлина.  $\square$

Из этого предложения следует, что

$$\dim_N \lambda = |SSYT(\lambda; N)|.$$

### 2.3 Стандартные таблицы Юнга и размерности неприводимых представлений $\mathfrak{S}(n)$

При комбинаторной интерпретации размерности  $\dim \lambda$  неприводимого представления группы  $\mathfrak{S}(n)$  (см. (2.1)) вместо условия перемежаемости  $\mu \prec \lambda$  возникает условие  $\mu \nearrow \lambda$ , состоящее в том, что  $\lambda$  получается из  $\mu$  путем добавления одной клетки (тогда  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  и  $\mu \in \mathbb{Y}_{n-1}$  для некоторого  $n$ ). Другими словами,  $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_\ell)$  для некоторого  $i$  (при этом должно быть  $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ ).

Пользуясь нашими знаниями о характерах  $\mathfrak{S}(n)$  (см. предыдущую лекцию), докажем правило Юнга ветвления неприводимых представлений  $\mathfrak{S}(n)$ . Пусть  $n \geq 2$ . В группе  $\mathfrak{S}(n)$  существует подгруппа, изоморфная  $\mathfrak{S}(n-1)$ . Например, подгруппа, состоящая из перестановок, оставляющих на месте элемент  $n$ .

**Предложение 2.6** (Правило Юнга). *Пусть  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  — диаграмма Юнга, и  $\chi^\lambda$  — соответствующий характер неприводимого представления  $\mathfrak{S}(n)$ . Тогда*

$$\chi^\lambda|_{\mathfrak{S}(n-1)} = \sum_{\mu: \mu \nearrow \lambda} \chi^\mu. \quad (2.6)$$

*Доказательство.* Используем формулу Фробениуса (теорема 1.13) для характеров группы  $\mathfrak{S}(n)$ :

$$p_\rho = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \chi_\rho^\lambda s_\lambda, \quad (2.7)$$

где  $\rho \vdash n$  — разбиение числа  $n$ , и тождество выше понимается как равенство симметрических функций.<sup>12</sup> Правую часть формулы (2.7) можно трактовать как производящую функцию для характеров, которая связывает индекс  $\lambda$ . Также (2.7) можно записывать в виде

$$\chi_\rho^\lambda = [p_\rho : s_\lambda], \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n, \quad \rho \vdash n.$$

Чтобы ограничить характер  $\chi^\lambda$  группы  $\mathfrak{S}(n)$  на подгруппу  $\mathfrak{S}(n-1)$ , следует взять разбиение  $\sigma \vdash n-1$ , и положить  $\rho = \sigma \cup 1$  (то есть,  $\rho$  получается

<sup>12</sup>От бесконечного числа переменных, см., напр., [Мак84, Гл. I, §2] (краткое определение дано также в предыдущей лекции).

из  $\sigma$  добавлением единичной части, в терминах диаграмм Юнга это отвечает добавлению новой строки, состоящей из одной клетки). Все разбиения вида  $\rho = \sigma \cup 1$  отвечают цикловым структурам перестановок, входящих в подгруппу  $\mathfrak{S}(n-1) \subset \mathfrak{S}(n)$ .

Имеем

$$\chi_{\sigma \cup 1}^\lambda = [p_{\rho \cup 1} : s_\lambda].$$

Ясно, что  $p_{\sigma \cup 1} = p_\sigma \cdot p_1$ . Таким образом,

$$\chi_{\sigma \cup 1}^\lambda = [p_\sigma p_1 : s_\lambda] = \left[ p_1 \sum_{\mu \in \mathbb{Y}_{n-1}} \chi_\sigma^\mu s_\mu : s_\lambda \right] = \sum_{\mu \in \mathbb{Y}_{n-1}} \chi_\sigma^\mu [s_\mu p_1 : s_\lambda].$$

Используя определение многочленов Шура через отношение двух определителей, можно показать (упражнение 8.2), что

$$s_\mu p_1 = \sum_{\lambda: \mu \nearrow \lambda} s_\lambda.$$

Таким образом, получаем искомое утверждение:

$$\chi_{\sigma \cup 1}^\lambda = \sum_{\mu: \mu \nearrow \lambda} \chi_\sigma^\mu.$$

□

Итерируя правило ветвления (2.6), легко получить следующее комбинаторное описание размерности  $\dim \lambda$  неприводимого представления группы  $\mathfrak{S}(n)$ :

**Следствие 2.7.** *Размерность  $\dim \lambda = \chi_{(1, \dots, 1)}^\lambda$  (где  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ ) неприводимого представления группы  $\mathfrak{S}(n)$  есть число последовательностей диаграмм Юнга вида*

$$\lambda^{(1)} \nearrow \lambda^{(2)} \nearrow \dots \nearrow \lambda^{(n)} = \lambda, \quad (2.8)$$

то есть, число возможных вариантов выстраивания диаграммы Юнга  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  путем последовательного добавления одной клетки.

**Замечание 2.8.** Можно отметить, что комбинаторные интерпретации размерностей  $\dim \lambda$  представлений  $\mathfrak{S}(n)$  и  $\text{Dim}_N \lambda$  представлений  $GL(N)$  в чем-то похожи, отличие состоит только в том, что в определении  $\dim \lambda$  разрешается приклеивать только по одной клетке, тогда как в определении  $\text{Dim}_N \lambda$  можно приклеивать целые горизонтальные полосы.

**Определение 2.9.** Пусть  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ . *Стандартной таблицей* формы  $\lambda$  называется заполнение диаграммы  $\lambda$  числами  $1, 2, \dots, n$  (каждое число встречается по одному разу), при котором числа возрастают вдоль строчек и вдоль столбцов. Обозначим через  $SYT(\lambda)$  множество стандартных таблиц формы  $\lambda$ .

Пример стандартной таблицы формы  $\lambda = (4, 3, 1)$ :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 6 & 7 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.9)$$

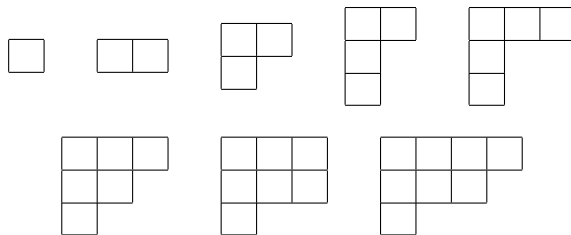
Отметим, что  $SYT(\lambda) \subset SSYT(\lambda; n)$ , где  $n = |\lambda| := \sum \lambda_i$ .  
Таким образом, мы доказали:

**Предложение 2.10.** *Размерность неприводимого представления группы  $\mathfrak{S}(n)$ , отвечающего диаграмме Юнга  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ , равна числу стандартных таблиц формы  $\lambda$ :*

$$\dim \lambda = |SYT(\lambda)|.$$

*Доказательство.* Действительно, диаграмма  $\lambda^{(i)}$  в последовательности 2.8 определяется также, как и в случае  $GL(N)$ :  $\lambda^{(i)}$  состоит из всех клеток в стандартной таблице формы  $\lambda$ , в которых стоит число  $\leq i$ .

Например, стандартной таблице (2.9) отвечает следующая последовательность диаграмм Юнга:



□

## 2.4 Алгоритм Шенстеда и двойственность Шура–Вейля

Вернемся к нашему тождеству для размерностей, которое получается из двойственности Шура–Вейля (см. предыдущую лекцию). Его можно записать следующим образом:

$$N^n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} |SYT(\lambda)| \cdot |SSYT(\lambda; N)|. \quad (2.10)$$

В этом подразделе мы дадим биективное доказательство этого тождества с использованием комбинаторного алгоритма, который будем называть алгоритмом Шенстеда.<sup>13</sup>

Во-первых, заметим, что  $N^n$  — это число элементов в множестве  $[N]^n$  (где  $[N] = 1, \dots, N$ ). Другими словами,  $N^n$  есть число упорядоченных слов

<sup>13</sup>В наибольшей общности этот алгоритм называется RSK-алгоритмом (Робинсон–Шенстед–Кнут). Шенстед был первым, кто рассматривал один частный случай этого алгоритма.

длины  $n$  в алфавите  $[N]$ . Алгоритм Шенстеда каждому слову сопоставляет пару таблиц одинаковой формы  $\lambda$ :

$$[N]^n \ni w = w_1 \dots w_n \mapsto (P, Q), \quad \text{где } P \in SSYT(\lambda; N) \text{ и } Q \in SYT(\lambda). \quad (2.11)$$

Здесь  $\lambda$  — некоторая диаграмма Юнга с  $n$  клетками (какая получится при применении алгоритма к слову  $w$ ).

Мы не будем описывать алгоритм Шенстеда полностью формально, а ограничимся одним примером. Полное формальное описание можно найти в книге Фултона [Фул06, §1.1 и §4.1].

Пусть  $N = 5$ ,  $n = 7$  и слово

$$w = 5233143. \quad (2.12)$$

Сначала покажем, как строится полустандартная таблица  $P$ . Она строится в  $n = 7$  шагов. На каждом шаге «читается» очередная буква в слове  $w$  и выполняется так называемая *строчная вставка* этой буквы в уже имеющуюся таблицу.

1. Уже имеющаяся таблица пуста, поэтому мы просто строим таблицу из одной клетки, в которой записано число 5:

$$\boxed{5}$$

2. Читаем следующую букву 2, пытаемся вставить ее в первую строчку. Ее нельзя поставить в конец первой строчки без нарушения условия полустандартности, поэтому 2 выбивает 5, при этом 2 становится на место 5, а 5 мы вставляем в следующую строчку:

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

3. Читаем букву 3, ее можно вставить в конец первой строчки:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}$$

4. Читаем букву 3, ее опять можно вставить в конец первой строчки:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

5. Читаем букву 1, эта буква выбивает 2 из первой строчки, а 2 при вставке во вторую строчку выбивает оттуда 5:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

6. Читаем букву 4, она становится в конец первой строчки:

1	3	3	4
2			
5			

7. Наконец, читаем букву 3, она выбивает букву 4 из первой строчки, а буква 4, в свою очередь, становится в конец второй строчки:

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.13)$$

В итоге получается полустандартная таблица  $P$  с  $n$  клетками, заполненная числами от 1 до  $N$ . Отметим, что таблица  $P$  заполнена именно буквами нашего исходного слова  $w$ .

Стандартная таблица  $Q$  строится как последовательность диаграмм Юнга, которые получаются на каждом шаге построения таблицы  $P$ . В данном примере стандартная таблица  $Q$  имеет вид:

$$Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 7 & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.14)$$

Таким образом, алгоритм Шенстеда по каждому слову из  $[N]^n$  строит пару таблиц одинаковой формы — стандартную и полустандартную (заполненную числами от 1 до  $N$ ). Например, по слову (2.12) были построены таблицы (2.13) и (2.14).

Алгоритм можно обратить, то есть, по паре таблиц  $P \in SSYT(\lambda; N)$  и  $Q \in SYT(\lambda)$  можно построить слово  $w \in [N]^n$ , так что соответствие Шенстеда (2.11) между словами и парами таблиц взаимно однозначно. Мы не будем этого доказывать, доказательство можно найти в [Фул06].

Таким образом, алгоритм Шенстеда дает биективное доказательство формулы (2.10).

## 2.5 Алгоритм Робинсона–Шенстеда и теорема Бернсайда для $\mathfrak{S}(n)$

Рассмотрим один важный частный случай алгоритма Шенстеда, который будем называть алгоритмом Робинсона–Шенстеда.

Будем трактовать группу  $\mathfrak{S}(n)$  как множество перестановочных слов. Другими словами, каждой перестановке

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

припишем слово  $w = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ . Ясно, что  $w \in [n]^n$ . На множестве всех перестановочных слов из  $n$  букв запустим алгоритм Шенстеда. Каждому перестановочному слову  $w$  этот алгоритм сопоставит пару *стандартных*

таблиц  $(P, Q)$  одинаковой формы  $\lambda$ . Действительно, таблица  $Q \in SYT(\lambda)$  стандартна по построению, а полустандартная таблица  $P \in SSYT(\lambda; n)$  заполнена буквами нашего исходного перестановочного слова (в котором каждая буква повторяется только по одному разу).

**Замечание 2.11.** Две стандартные таблицы  $P$  и  $Q$  возникают из совершенно различных соображений — в  $P$  записываются буквы нашего перестановочного слова, а таблица  $Q$  регистрирует рост диаграммы Юнга. В следующем подразделе мы приведем геометрическую интерпретацию алгоритма Робинсона–Шенстеда, в которой роль таблиц  $P$  и  $Q$  симметрична.

Оказывается, что если перестановке  $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$  соответствует пара стандартных таблиц  $(P, Q)$ , то пара таблиц  $(Q, P)$  соответствует перестановке  $\sigma^{-1}$ .

В результате из описанной конструкции мы получаем следующее тождество:

$$|\mathfrak{S}(n)| = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} |SYT(\lambda)|^2,$$

или

$$n! = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} (\dim \lambda)^2. \quad (2.15)$$

Тождество (2.15) называется теоремой Бернсайда (для группы  $\mathfrak{S}(n)$ ), которая утверждает в общем случае, что

*для любой конечной группы сумма квадратов размерностей ее неприводимых комплексных представлений равна порядку группы.*

Как мы видели, в случае группы  $\mathfrak{S}(n)$  существует биективное доказательство этой теоремы.

Открытая проблема состоит в том, чтобы найти биективное доказательство теоремы Бернсайда для «родственника»<sup>14</sup> группы  $\mathfrak{S}(n)$  — группы  $GL(n, \mathbb{F}_q)$  обратимых матриц над полем из  $q$  элементов.

## 2.6 Геометрическая интерпретация алгоритма Робинсона–Шенстеда

Приведем геометрическую интерпретацию алгоритма Робинсона–Шенстеда (для симметрической группы), заимствованную из книги [Sag01]. Эта конструкция была открыта Viennot. Мы будем рассматривать данную конструкцию на примере:

$$n = 7, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}(7).$$

<sup>14</sup>Есть некоторые неформальные причины для отождествления  $\mathfrak{S}(n)$  с « $GL(n, \mathbb{F}_1)$ ».

При применении алгоритма Робинсона–Шенстеда к этой перестановке (то есть, к слову  $w = 4236517$ ) получатся таблицы

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 6 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$$

Теперь опишем нашу геометрическую конструкцию. Начнем с того, что нарисуем график перестановки  $\sigma$  как отображения  $[n] \rightarrow [n]$  (рис. 1). От

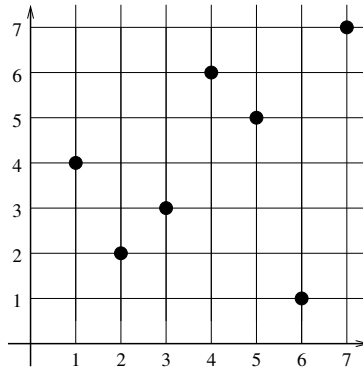


Рис. 1.

каждой точки на графике проведем вертикальный и горизонтальный лучи в положительном направлении, и «закрасим» область между лучами (рис. 2). Рассмотрим объединение всех этих областей и границу этого объеди-

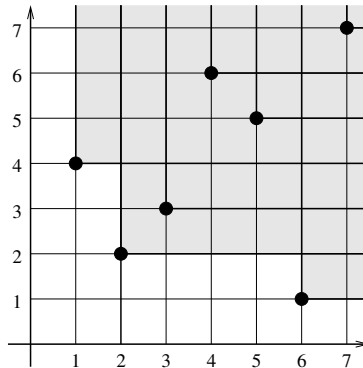


Рис. 2.

нения. Отдельно пометим «внутренние углы» границы, то есть, те углы, которые не принадлежат графику нашей перестановки (рис. 3). Повторим процедуру еще несколько раз (в нашем случае еще 3 раза) внутри области

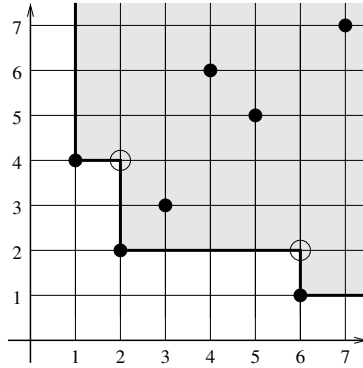


Рис. 3.

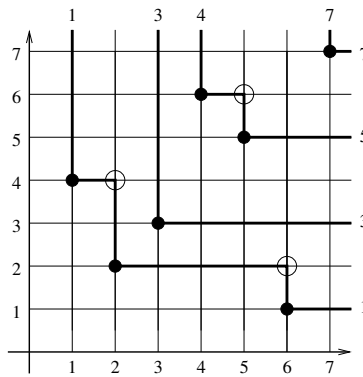


Рис. 4.

(рис. 4). На рис. 4 мы видим 4 луча, уходящие вверх, и 4 луча, уходящие вправо. Запишем их абсциссы и ординаты, соответственно. Видно, что числа справа совпадают с числами, стоящими в первой строчке таблицы  $P$ , а числа сверху совпадают с числами, стоящими в первой строчке таблицы  $Q$ . Чтобы получить вторые строчки таблиц, надо повторить всю процедуру, взяв изначально вместо графика перестановки обведенные точки на рис. 4. Получим вторые строчки таблиц  $P$  и  $Q$  (рис. 5). Продолжая ту же самую

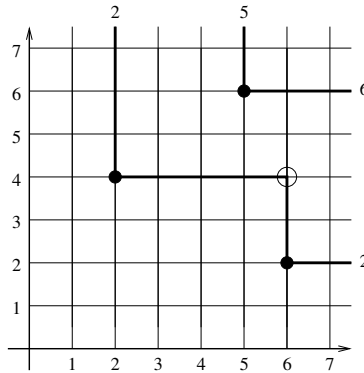


Рис. 5.

процедуру с обведенной точкой на рис. 5, получим третьи строчки таблиц  $P$  и  $Q$ .

Доказательство того, что для любого перестановочного слова мы в результате действительно получим таблицы  $P$  и  $Q$  (в которые это слово перерабатывается алгоритмом Робинсона–Шенстеда), можно найти в книге [Sag01].

**Замечание 2.12.** Из данной геометрической интерпретации видно, что если перестановочное слово  $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$  перерабатывается алгоритмом Робинсона–Шенстеда в пару стандартных таблиц  $(P, Q)$ , то слово  $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}(n)$  (отвечающее обратной перестановке) перерабатывается в пару таблиц  $(Q, P)$ . Действительно, график обратной перестановки  $\sigma^{-1}$  получается из графика  $\sigma$  транспонированием.

## 2.7 Упражнения

**Упражнение 2.1.** Пользуясь определением многочленов Шура, покажите, что

$$s_{\mu} p_1 = \sum_{\lambda: \mu \nearrow \lambda} s_{\lambda}.$$

## 3 Формулы для размерности. Случайные диаграммы Юнга

### 3.1 Два ансамбля случайных диаграмм Юнга

Напомним, что у нас были два параметра — натуральные числа  $n$  и  $N$ . Из двойственности Шура–Вейля для представлений  $\mathfrak{S}(n)$  и  $GL(N)$  мы получили следующую формулу (см. лекцию 1):

$$N^n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)} |SYT(\lambda)| \cdot |SSYT(\lambda; N)|. \quad (3.1)$$

Здесь  $\mathbb{Y}_n(N)$  — множество диаграмм Юнга с  $n$  клетками и  $\leq N$  ненулевыми строчками,  $SYT(\lambda)$  — множество стандартных таблиц формы  $\lambda$ , а  $SSYT(\lambda; N)$  — множество полустандартных таблиц формы  $\lambda$ , заполненных числами из алфавита  $[N] := \{1, \dots, N\}$ .

В лекции 2 мы дали комбинаторное доказательство формулы (3.1), а также получили еще одно важное тождество — теорему Бернсайда для  $\mathfrak{S}(n)$ :

$$n! = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} |SYT(\lambda)|^2. \quad (3.2)$$

Мы знаем, что  $|SYT(\lambda)| = \dim \lambda$  — размерность соответствующего неприводимого представления  $\mathfrak{S}(n)$ , а  $|SSYT(\lambda; N)| = \text{Dim}_N \lambda$  — представления  $GL(N)$ .

С помощью тождеств (3.1) и (3.2) определим две вероятностные меры на диаграммах Юнга:

**Определение 3.1.**

- $P_N^{(n)}(\lambda) := \frac{\dim \lambda \cdot \text{Dim}_N \lambda}{N^n}, \quad \text{supp } P_N^{(n)} = \mathbb{Y}_n(N).$
- $P^{(n)}(\lambda) := \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}, \quad \text{supp } P^{(n)} = \mathbb{Y}_n.$

Другими словами, мы определили два ансамбля случайных диаграмм Юнга. Мера  $P^{(n)}$  на  $\mathbb{Y}_n$  называется *мерой Планшереля* (название введено Вершиком и Керовым [BK77]). Эта мера связана с формулой Планшереля для симметрической группы.

Отметим, что для  $N \geq n$  выполнено  $\mathbb{Y}_n(N) = \mathbb{Y}_n$ . Вообще, можно считать, что меры  $P_N^{(n)}$  и  $P^{(n)}$  живут на одном и том же (конечном) множестве  $\mathbb{Y}_n$ .

**Предложение 3.2.**  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N^{(n)} = P^{(n)}$ .<sup>15</sup>

<sup>15</sup>Отметим, что так как множество  $\mathbb{Y}_n$  конечно, то доказывать сходимость мер надо просто на каждой фиксированной диаграмме Юнга  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ .

*Доказательство.* Используем комбинаторные алгоритмы, рассмотренные в лекции 2. Алгоритм Шенстеда дает нам проекцию

$$[N]^n \rightarrow \mathbb{Y}_n(N) \subseteq \mathbb{Y}_n \quad (3.3)$$

(по слову  $w \in [N]^n$  строятся две таблицы одинаковой формы  $\lambda$ , и выше слову  $w \in [N]^n$  мы как раз и сопоставляем диаграмму  $\lambda \in \mathbb{Y}_n(N)$ ). Число  $N$  можно считать достаточно большим, так что  $\mathbb{Y}_n(N) = \mathbb{Y}_n$ . То есть, у нас есть проекция

$$[N]^n \rightarrow \mathbb{Y}_n.$$

На множестве  $[N]^n$  введем равномерную меру. Легко видеть, что при проекции  $[N]^n \rightarrow \mathbb{Y}_n$  эта мера переходит в  $P_N^{(n)}$ .

Отметим, что с вероятностью, близкой к единице (при больших  $N$ ), все буквы случайного слова  $w = w_1 w_2 \dots w_n \in [N]^n$  будут различны. Действительно, обозначим через  $[N]_o^n \subset [N]^n$  множество слов, в которых все буквы различны. Тогда ясно, что

$$[N]^n = N^n, \quad [N]_o^n = N(N-1)\dots(N-n+1),$$

и поэтому

$$\frac{|[N]_o^n|}{|[N]^n|} \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty$$

при фиксированном  $n$ .

Условная мера на множестве  $[N]_o^n$  также будет равномерной. На множестве  $[N]_o^n$  также можно устроить проекцию  $[N]_o^n \rightarrow \mathfrak{S}(n)$ . Действительно, для каждого слова  $w = w_1 \dots w_n \in [N]_o^n$ , в котором все буквы различны, рассмотрим слово, составленное из рангов его букв (например, для слова 714 слово из рангов — это 312). Слово, составленное из рангов, уже является перестановочным словом, то есть, элементом  $\mathfrak{S}(n)$ . Алгоритм Робинсона–Шенстеда дает проекцию  $\mathfrak{S}(n) \rightarrow \mathbb{Y}_n$ . При этой проекции равномерная мера на  $\mathfrak{S}(n)$  переходит в меру Планшереля  $P^{(n)}$  на  $\mathbb{Y}_n$ .

Так как алгоритмы Шенстеда и Робинсона–Шенстеда на самом деле оперируют только с рангами букв (в соответствующих алфавитах), то легко видеть, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [N]_o^n & \rightarrow & \mathfrak{S}(n) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{Y}_n \end{array}$$

коммукативна. В этой диаграмме равномерная мера на  $[N]_o^n$  переходит в меру Планшереля на  $\mathbb{Y}_n$ . Равномерная мера на  $[N]^n$ , в свою очередь, определяет меру  $P_N^{(n)}$  на  $\mathbb{Y}_n$ .

Так как при  $N \rightarrow \infty$  вклад разницы  $[N]^n \setminus [N]_o^n$  стремится к нулю, видно, что  $P_N^{(n)} \rightarrow P^{(n)}$ .  $\square$

### 3.2 Формулы для размерности $\text{Dim}_N \lambda$

В этом подразделе мы рассмотрим явные формулы для размерности неприводимых (полиномиальных) представлений  $GL(N)$ , то есть, для чисел  $\text{Dim}_N \lambda = |\text{SSYT}(\lambda; N)|$ .

**Предложение 3.3.** *Имеем*

$$\text{Dim}_N \lambda = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}. \quad (3.4)$$

*Доказательство I.* Как известно,  $\text{Dim}_N \lambda = s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_N)$ . Для вычисления этого значения функции Шура можно пользоваться определением функции  $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$  как отношения двух определителей:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i + N - i})_{i,j=1,\dots,N}}{V(x_1, \dots, x_N)},$$

где  $V_N$  — определитель Вандермонда. При  $x_1 = \dots = x_N = 1$  числитель и знаменатель обнуляются. Однако, для вычисления  $s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_N)$  можно использовать следующий прием (подробнее см., напр., в [Оль09, Лекция 2]): сначала положить  $x_1 = 1, x_2 = q, \dots, x_N = q^{N-1}$ , и посчитать  $s_\lambda(1, q, \dots, q^{N-1})$ , а затем перейти к пределу при  $q \rightarrow 1$ .  $\square$

*Доказательство II.* Дадим важную интерпретацию  $\text{Dim}_N \lambda$  как некоторого числа непересекающихся путей. От записи  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0)$  перейдем к записи  $l = (l_1 > l_2 > \dots > l_N \geq 0)$ , где

$$l_i := \lambda_i + N - i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Будем интерпретировать  $l$  как точечную конфигурацию в  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Положим также

$$l^0 := (N - 1, N - 2, \dots, 1, 0).$$

Конфигурация  $l^0$  соответствует пустой диаграмме Юнга.

Рассмотрим следующую модель непересекающихся путей. Разместим точки конфигураций  $l^0$  и  $l$  на решетке, как показано на рис. 6. Точки конфигурации  $l^0$  (то есть, точки  $(N - 1, N - 2, \dots, 1, 0)$ ) разместим слева, это будут «входы», а точки конфигурации  $l$  — справа, это будут «выходы».

Рассмотрим непересекающиеся пути, которые соединяют  $l_i^0$  с  $l_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  (всего  $N$  путей). Пути должны проходить вдоль ребер ориентированного графа, изображенного на рис. 7 (заметим, что слева отсутствуют ребра, идущие вверх!). Пример семейства непересекающихся путей изображен на рис. 8.

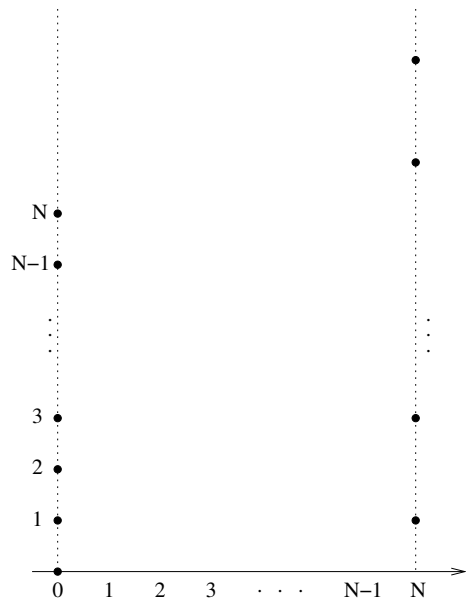


Рис. 6.

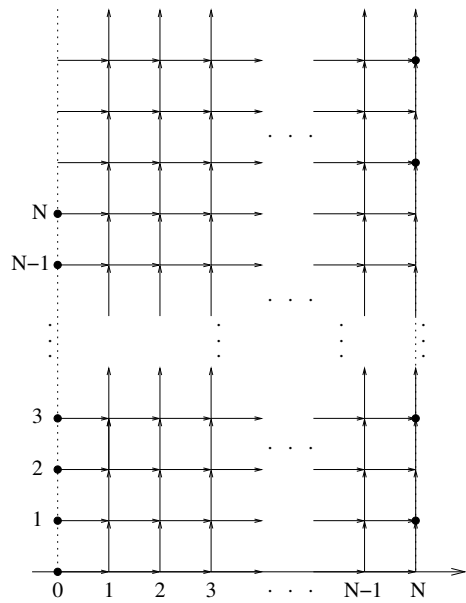


Рис. 7.

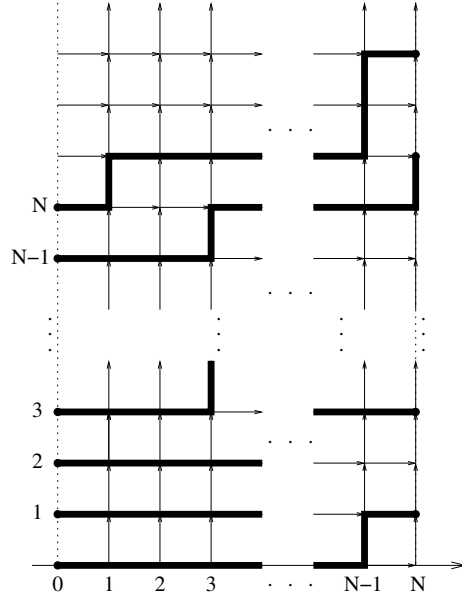


Рис. 8.

Существует биекция между множеством  $SSYT(\lambda; N)$  полустандартных таблиц формы  $\lambda$  и описанным множеством наборов непересекающихся путей. Действительно, полустандартная таблица формы  $\lambda$  — это последовательность диаграмм Юнга

$$\emptyset = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \dots \subset \lambda^{(N)} = \lambda, \quad \lambda^{(i)} \in \mathbb{Y}(i),$$

с условием, что для всех  $i$  косая диаграмма  $\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$  представляет собой горизонтальную полоску. Можно легко понять, что конфигурация  $l(i)$  (где  $i$  — «время», которое измеряется вдоль оси абсцисс) как раз соответствует диаграмме  $\lambda^{(i)}$ .

Таким образом, задача подсчета размерности  $\text{Dim}_N \lambda = |SSYT(\lambda; N)|$  сводится к подсчету числа наборов непересекающихся путей. Подобный подсчет был проделан, напр., в [Оль09, Лекция 6]. Искомое число наборов непересекающихся путей равно

$$\det [A(i, j)]_{i, j=1}^N,$$

где  $A(i, j)$  — число всех путей от  $l_i^0 = N - i$  до  $l_j = \lambda_j + N - j$  вдоль ребер ориентированного графа (см. рис. 7). Легко видеть, что  $A(i, j)$  — это биномиальный коэффициент

$$A(i, j) = \frac{(\lambda_j - j + i + N - 1)!}{(\lambda_j - j + i)!(N - 1)!}. \quad (3.5)$$

Таким образом, доказательство предложения сводится к подсчету определителя  $\det [A(i, j)]$ . Этот определитель можно вычислить, пользуясь обзором [Кга99].

Предложение доказано.  $\square$

Дадим еще одну формулу для  $\text{Dim}_N \lambda$ .

**Предложение 3.4.** *Имеем*

$$\text{Dim}_N \lambda = \prod_{\square \in \lambda} \frac{N + c(\square)}{h(\square)}. \quad (3.6)$$

Здесь произведение ведется по всем клеткам  $\square$  диаграммы  $\lambda$ ,  $c(\square)$  — *содержание* клетки, а  $h(\square)$  — *длина крюка* клетки. Если клетка  $\square$  находится в  $j$ -м столбце и  $i$ -й строке, то  $c(\square)$  по определению равно  $j - i$ . Длина крюка  $h(\square)$  — это число клеток диаграммы  $\lambda$ , которые находятся строго справа от клетки  $\square$  плюс число клеток, которые находятся строго снизу от клетки  $\square$  плюс один (мы также включаем в крюк саму клетку  $\square$ ). Пример крюка — на рис. 9. В качестве еще одного примера возьмем конкретную диаграмму

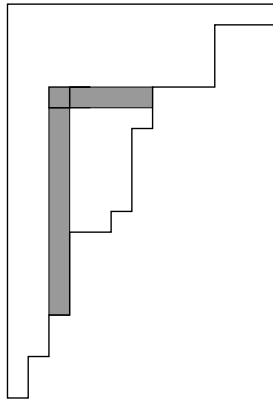


Рис. 9.

$\lambda$  и запишем в каждой клетке длину ее крюка:

6	4	3	1
4	2	1	
1			

*Доказательство.* Доказать, что формулы (3.4) и (3.6) для  $\text{Dim}_N \lambda$  эквивалентны, можно напрямую, см., напр., [Мак84, Гл. I].  $\square$

Дадим несколько замечаний о формулах (3.4) и (3.6) для размерности  $\text{Dim}_N \lambda$ .

- Во-первых, из (3.6) видно, что для фиксированного  $\lambda$  величина  $\text{Dim}_N \lambda$  представляет собой многочлен от  $N$  степени  $n$  со старшим членом  $\prod_{\square \in \lambda} \frac{1}{h(\square)}$ .
- Если  $\ell(\lambda) > N$ , то из (3.6) видно, что  $\text{Dim}_N \lambda = 0$ . Действительно, если  $\ell(\lambda) > N$ , то в  $\lambda$  обязательно найдется клетка (в первом столбце) с содержанием  $(-N)$ .

Отметим, что в лекции 2 мы интерпретировали размерность  $\text{Dim}_N \lambda$  как число схем Гельфанда–Цетлина с фиксированной верхней строкой  $\lambda^{(N)} = \lambda$ . Поэтому размерность  $\text{Dim}_N \lambda$  удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям:

$$\text{Dim}_N \lambda = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} \text{Dim}_{N-1} \mu \quad (3.7)$$

с начальными условиями

$$\text{Dim}_1 \lambda = 1 \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{Y}(1) = \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (3.8)$$

Напомним, что запись  $\mu \prec \lambda$  означает, что  $\mu$  перемежается с  $\lambda$  (см. лекцию 2).

В книге [Мак84] написано явное доказательство того, что правая часть формулы (3.4) для  $\text{Dim}_N \lambda$  удовлетворяет этим рекуррентным соотношениям.

### 3.3 Формулы для размерности $\dim \lambda$

Перейдем к рассмотрению размерности  $\dim \lambda$  соответствующего неприводимого представления  $\mathfrak{S}(n)$ :

$$\dim \lambda = \chi_{(1, \dots, 1)}^\lambda = \dim V_\lambda^{\mathfrak{S}(n)}.$$

Напомним, что  $\dim \lambda$  — это также число стандартных таблиц формы  $\lambda$ .

Докажем три формулы для  $\dim \lambda$ :

**Предложение 3.5.** 1.

$$\dim \lambda = \frac{n! \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{\prod_{i=1}^N (\lambda_i + N - i)!}, \quad (3.9)$$

где  $N$  — любое число  $\geq \ell(\lambda)$ .

2.

$$\dim \lambda = n! \det \left[ \frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right]_{i,j=1}^N, \quad (3.10)$$

где  $N$  — опять же любое число  $\geq \ell(\lambda)$ .<sup>16</sup>

<sup>16</sup>Отметим, что матрица  $\left[ \frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right]$  является почти унитреугольной, то есть, представляет собой матрицу с единицами на главной диагонали и нулями под главной диагональю, «испорченную» в конечном числе мест. Поэтому можно даже считать, что  $\det \left[ \frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right]$  есть детерминант бесконечной матрицы.

3. (формула крюков)

$$\dim \lambda = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} h(\square)}. \quad (3.11)$$

Эквивалентность формул (3.9), (3.10) и (3.11). Можно понять (подсчитав определитель в (3.10) [Кра99]), что (3.9) — это то же самое, что (3.10),

Положим  $N = \ell(\lambda)$  в (3.9) (легко понять, что при разных  $N \geq \ell(\lambda)$  правая часть (3.9) дает одно и то же). Эквивалентность (3.9) и (3.11) устанавливается по индукции по числу столбцов в диаграмме  $\lambda$ : отрезем от  $\lambda$  первый (самый левый) столбец, и проследим, как изменятся правые части (3.9) и (3.11) при этом отрезании.

Таким образом, эквивалентность формул (3.9), (3.10) и (3.11) установлена. Перейдем к доказательству того, что они действительно дают  $\dim \lambda$ . Будем доказывать это несколькими способами.

*Первый способ.* Воспользуемся фундаментальной теоремой Фробениуса (теорема 1.13):

$$\chi_\rho^\lambda = [p_\rho : s_\lambda].$$

Нам надо вычислить размерность  $\dim \lambda = \chi_{(1, \dots, 1)}^\lambda$ . Ясно, что  $p_{(1, \dots, 1)} = p_1^n$ , поэтому

$$\dim \lambda = [p_1^n : s_\lambda].$$

От симметрических функций  $p_1^n$  и  $s_\lambda$  перейдем к симметрическим многочленам, взяв достаточно большое конечное число переменных (скажем,  $N \geq n$ ). Таким образом, следует найти коэффициент при  $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$  в многочлене  $(x_1 + \dots + x_N)^n$ . Воспользуемся [Оль09, Замечание 1.11], из которого следует, что

$$\dim \lambda = \left[ (x_1 + \dots + x_N)^N V_N(x_1, \dots, x_N) : x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_N^{l_N} \right],$$

где  $V_N$  — определитель Вандермонда и  $l_i = \lambda_i + N - i$ .

*Второй способ.* Этот способ состоит в проверке соответствующих рекуррентных соотношений для  $\dim \lambda$  (они вытекают из интерпретации  $\dim \lambda$  как числа стандартных таблиц):

$$\dim \lambda = \sum_{\mu: \mu \nearrow \lambda} \dim \mu \quad (3.12)$$

с начальным условием  $\dim \emptyset = 1$ .

*Третий способ.* Этот способ состоит в использовании формулы (3.6) для  $\text{Dim}_N \lambda$  и сходимости вероятностных мер (на  $\mathbb{Y}_n$ )  $P_N^{(n)}$  к  $P^{(n)}$ . В результате получится формула крюков (3.11) для  $\dim \lambda$ . Действительно, для фиксированной диаграммы  $\lambda$  имеем

$$P_N^{(n)}(\lambda) = \dim \lambda \cdot \frac{\text{Dim}_N \lambda}{N^n} = \dim \lambda \cdot \frac{1}{N^n} \cdot \prod_{\square \in \lambda} \frac{N + c(\square)}{h(\square)}.$$

С одной стороны, это выражение стремится к  $P^{(n)}(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}$ , а с другой — к

$$\dim \lambda \cdot \prod_{\square \in \lambda} \frac{1}{h(\square)}.$$

### 3.4 Отступление: связь $\text{Dim}_N \lambda$ с резольвентами

Формула  $\text{Dim}_N \lambda = \det [A(i, j)]$ , где  $A(i, j)$  — соответствующие биномиальные коэффициенты (3.5), является специализацией тождества Якоби–Труди (см., напр., [Мак84, Гл. I]):

$$s_\lambda = \det [h_{\lambda_i - i + j}], \quad (3.13)$$

где  $h_k = s_{(k)}$  — полные симметрические функции. Специализация берется в точке  $x_1 = \dots = x_N = 1$ .

Известно, что  $h_k(x_1, \dots, x_N)$  — это характер  $S^k \mathbb{C}^N$  (как представления  $GL(N)$ , где  $\mathbb{C}^N$  — тавтологическое представление  $GL(N)$ ). Ясно, что тождество (3.13) можно записать в виде

$$s_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} \text{sgn}(\sigma) \cdot h_{\lambda_1 - 1 + \sigma(1)} \dots h_{\lambda_N - N + \sigma(N)}. \quad (3.14)$$

Понятно, что  $h_{\lambda_1 - 1 + \sigma(1)} \dots h_{\lambda_N - N + \sigma(N)}$  — характер тензорного произведения

$$S^{\lambda_1 - 1 + \sigma(1)} \mathbb{C}^N \otimes \dots \otimes S^{\lambda_N - N + \sigma(N)} \mathbb{C}^N.$$

Перепишем (3.14) в виде

$$s_\lambda = \sum_{k=0}^{N(N-1)/2} (-1)^k \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(N): \text{sgn}(\sigma)=k} h_{\lambda_1 - 1 + \sigma(1)} \dots h_{\lambda_N - N + \sigma(N)}$$

и определим  $GL(N)$ -модуль

$$V^{(k)} := \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}(N): \text{sgn}(\sigma)=k} \left( S^{\lambda_1 - 1 + \sigma(1)} \mathbb{C}^N \otimes \dots \otimes S^{\lambda_N - N + \sigma(N)} \mathbb{C}^N \right),$$

где  $k = 0, 1, \dots, N(N-1)/2$ .

Эти рассуждения могли бы означать, что существует точная резольвента

$$0 \rightarrow V^{\binom{N(N-1)}{2}} \rightarrow \dots \rightarrow V^{(1)} \rightarrow V^{(0)} \rightarrow V_\lambda^{GL(N)},$$

где  $V_\lambda^{GL(N)}$  — неприводимое представление  $GL(N)$  с характером  $s_\lambda$ .<sup>17</sup> Задача состоит в том, чтобы явно построить эту резольвенту.

<sup>17</sup>Есть теорема, что характер последнего модуля в этой цепочке есть знакопеременная сумма характеров всех членов цепочки

### 3.5 Пуассонизация

Были определены вероятностные меры  $P_N^{(n)}$  и  $P^{(n)}$  на пространствах  $\mathbb{Y}_n(N)$  и  $\mathbb{Y}_n$ , соответственно. Интересно изучать их пределы при  $N, n \rightarrow \infty$ . Первая задача подобного рода (задача Улама) была решена в 1977 году в работах [LS77] и [BK77] для мер  $P^{(n)}$ .

Один из подходов к изучению пределов данных мер состоит в их *пуассонизации*. Идея заключается в том, чтобы рандомизировать индекс  $n$ .

Напомним определение пуассоновской случайной величины.

**Определение 3.6.** Распределением Пуассона на  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  называется

$$\text{Poisson}_\nu(n) := e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!},$$

где  $\nu > 0$  — параметр.

Рассмотрим пуассонизацию на примере мер  $P_N^{(n)}$ . Каждая мера  $P_N^{(n)}$  живет на пространстве  $\mathbb{Y}_n(N)$ . Рассмотрим меру

$$P_N^{(\nu)}(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} P_N^{(n)}(\lambda) \cdot \text{Poisson}_\nu(n).$$

Ясно, что это вероятностная мера на пространстве

$$\mathbb{Y}(N) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Y}_n(N).$$

Другими словами, чтобы разыграть случайную диаграмму по мере  $P_N^{(\nu)}$ , надо сначала разыграть  $n$  по пуассоновской мере  $\text{Poisson}_\nu$ , а затем, при данном  $n$ , случайную диаграмму  $\in \mathbb{Y}_n(N)$  по мере  $P_N^{(n)}$ .

*Принцип эквивалентности ансамблей*<sup>18</sup> состоит в том, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_N^{(n)}$$

может быть заменен на предел

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_N^{(\nu)}.$$

Следующие эвристические рассуждения дают надежду на верность этого принципа. Пусть  $\xi \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  — случайная величина, распределенная по закону Пуассона  $\text{Poisson}_\nu$ , то есть,

$$\text{Prob}(\xi = n) = e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

<sup>18</sup>Который, разумеется, нужно устанавливать отдельно!

Можно вычислить моменты  $\xi$ , то есть, величины  $\mathbb{E}\xi^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Однако, гораздо удобнее рассматривать факториальные моменты, то есть,

$$\mathbb{E}\xi^{\downarrow k}, \quad \text{где } \xi^{\downarrow k} := \xi(\xi - 1) \dots (\xi - k + 1).$$

Легко вычислить, что  $\mathbb{E}\xi^{\downarrow k} = \nu^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi &= \nu, \\ \mathbb{E}(\xi^2 - \xi) &= \nu^2, \\ \mathbb{D}\xi &= \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}\xi)^2 = \nu. \end{aligned}$$

Неформально можно утверждать, что при больших  $\nu$  с большой вероятностью выполнено

$$\xi \approx \nu \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right) \right),$$

то есть, что при больших  $\nu$  величина  $\xi$  концентрируется вокруг своего среднего  $\nu$ .

Поэтому, заменяя  $n$  на случайную величину  $\xi \sim \text{Poisson}_\nu$  в мерах  $P_N^{(n)}$ , можно ожидать, что пределы при  $n \rightarrow \infty$  и при  $\nu \rightarrow \infty$  окажутся одинаковыми.

### 3.6 Упражнения

**Упражнение 3.1.** Проведите все вычисления в первом доказательстве предложения 3.3.

**Упражнение 3.2.** Убедитесь в биекции между наборами непересекающихся путей и полустандартными таблицами Юнга (второе доказательство предложения 3.3).

**Упражнение 3.3.** Вычислите  $\det [A(i, j)]$  из второго доказательства предложения 3.3.

**Упражнение 3.4.** Докажите предложение 3.4.

**Упражнение 3.5.** Проверьте справедливость рекуррентных соотношений (3.7)–(3.8) для правой части (3.4).

**Упражнение 3.6.** Убедитесь в равенстве правых частей (3.9) и (3.10).

**Упражнение 3.7.** Докажите (по индукции по числу столбцов в диаграмме) равенство правых частей (3.9) и (3.11).

**Упражнение 3.8.** Докажите, что

$$\dim \lambda = \left[ (x_1 + \dots + x_N)^N V_N(x_1, \dots, x_N) : x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_N^{l_N} \right],$$

где  $\lambda$  — диаграмма Юнга,  $N$  достаточно велико,  $l_i := \lambda_i + N - i$ . Здесь  $\dim \lambda$  можно считать заданной правой частью (3.9), (3.10) или (3.11).

**Упражнение 3.9.** Проверьте справедливость рекуррентных соотношений (3.12) для  $\dim \lambda$ . Здесь  $\dim \lambda$  можно считать заданной правой частью (3.9), (3.10) или (3.11).

**Упражнение 3.10.** Вычислите  $\mathbb{E}\xi^{\downarrow k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), где  $\xi$  — пуассоновская случайная величина с параметром  $\nu > 0$ .

## 4 Мера Планшереля, детерминантные процессы и ортогональные многочлены

### 4.1 Мера $P_{\nu, N}$ на $N$ -точечных конфигурациях на полурешетке

Напомним, что мы рассматривали два семейства мер:

- меры Планшереля  $P^{(n)}$  на  $\mathbb{Y}_n$  (множестве диаграмм Юнга с  $n$  клетками),

$$P^{(n)}(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n;$$

- меры  $P_N^{(n)}$  (возникающие в двойственности Шура–Вейля) на  $\mathbb{Y}_n(N)$  (множестве диаграмм Юнга с  $n$  клетками и  $\leq N$  строчками),

$$P_N^{(n)}(\lambda) = \frac{\dim \lambda \cdot \text{Dim}_n \lambda}{N^n}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n(N).$$

Мы знаем, что  $P_N^{(n)} \rightarrow P^{(n)}$  при  $N \rightarrow +\infty$ .

Запишем формулы для размерностей  $\dim \lambda$  и  $\text{Dim}_N \lambda$ , полученные в предыдущей лекции, в координатах  $(l_1, \dots, l_N)$ , где  $l_i = \lambda_i - N + i$ :

$$\dim \lambda = n! \frac{V_N(l_1, \dots, l_N)}{\prod_{i=1}^N l_i!}, \quad \text{Dim}_N \lambda = \frac{V_N(l_1, \dots, l_N)}{\prod_{i=1}^N (N - i)!}.$$

Здесь, как и раньше,  $V_N$  обозначает определитель Вандермонда.

В этой лекции мы в основном будем изучать меру  $P_N^{(n)}$ . Запишем ее в координатах  $l_i$ :

$$P_N^{(n)}(\lambda) = \frac{n!}{N^n \prod_{i=1}^N (N - i)!} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{1}{l_i!} \cdot V_N^2(l_1, \dots, l_N). \quad (4.1)$$

Здесь ясно, что  $n = l_1 + \dots + l_N - \frac{N(N-1)}{2}$ .

Рассмотрим пуассонизацию мер  $P_N^{(n)}$  по параметру  $n$ , то есть, определим меру  $P_{\nu, N}$  по формуле

$$P_{\nu, N}(\lambda) = e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!} P_N^{(n)}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n(N)$$

(см. также конец предыдущей лекции). Здесь  $\nu > 0$  — параметр, а  $n = |\lambda| = \sum_{i=1}^N \lambda_i$ .

Каждая мера  $P_N^{(n)}$  жила на множестве  $\mathbb{Y}_n(N)$  диаграмм Юнга с  $n$  клетками и числом строк  $\leq N$ . Пуассонизация снимает ограничение на число клеток, и таким образом,  $P_{\nu, N}$  — мера, которая уже живет на множестве  $\mathbb{Y}(N)$  всех диаграмм Юнга с  $\leq N$  строками. Запишем меру  $P_{\nu, N}$  в координатах  $(l_1, \dots, l_N)$ . Для этого положим  $\theta := \frac{\nu}{N}$ , и также вспомним наше обозначение для пуассоновского распределения на неотрицательных целых числах:

$$\text{Poisson}_{\theta}(k) := e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В итоге получаем:

$$P_{\nu, N}(\lambda) = P_{\nu, N}(l_1, \dots, l_N) = \frac{1}{Z(\nu, N)} \prod_{i=1}^N \text{Poisson}_{\theta}(l_i) \cdot V_N^2(l_1, \dots, l_N). \quad (4.2)$$

Здесь  $Z(\nu, N)$  — нормировочный множитель (подобранный так, чтобы сумма вероятностей  $P_{\nu, N}$  была равна единице). Легко видеть, что он равен

$$Z(\nu, N) = \theta^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{i=1}^N (N-i)!$$

Ясно, что диаграммы Юнга  $\lambda \in \mathbb{Y}(N)$  взаимно однозначно соответствуют наборам  $(l_1, \dots, l_N)$ , таким, что  $l_1 > \dots > l_N \geq 0$ . Будем мыслить такие наборы  $(l_1, \dots, l_N)$  как  $N$ -точечные конфигурации на решетке  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Таким образом,  $P_{\nu, N}$  задает вероятностную меру на  $N$ -точечных конфигурациях на решетке, или  $N$ -частичный *точечный процесс* на  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

## 4.2 Напоминание: Точечные процессы. $N$ -точечные ортогональные полиномиальные ансамбли.

В первой части лекций [Оль09, Лекции 12 и 13] мы рассматривали точечные процессы. Напомним основные понятия.

Пусть  $\mathfrak{X}$  — дискретное пространство, которое может быть конечным или счетным (например,  $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}$  или  $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$  или  $\mathfrak{X} = \{1, 2, \dots, N\}$ ).

**Определение 4.1.** (Точечной) *конфигурацией* в  $\mathfrak{X}$  называется любое подмножество  $X \subseteq \mathfrak{X}$ . Мы считаем, что в одной точке множества  $\mathfrak{X}$  не может находиться более одной точки конфигурации  $X$ .

Через  $\text{Conf}(\mathfrak{X})$  обозначим множество всех конфигураций на множестве  $\mathfrak{X}$ .<sup>19</sup> Пространство  $\text{Conf}(\mathfrak{X})$  наделяется топологией произведения «двоеточий»  $\{0, 1\}$ . Это вполне несвязное (totally disconnected) пространство. Разумеется, если  $\mathfrak{X}$  конечно, то и  $\text{Conf}(\mathfrak{X})$  тоже конечно.

<sup>19</sup>Более привычное обозначение —  $\{0, 1\}^{\mathfrak{X}}$ , однако, мы будем писать  $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ .

**Определение 4.2.** Точечным процессом на множестве  $\mathfrak{X}$  называется борелевская вероятностная мера на  $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ .

Другими словами, точечный процесс — это случайная конфигурация на множестве  $\mathfrak{X}$ .

Если множество  $\mathfrak{X}$  конечно, то точечный процесс на  $\mathfrak{X}$  можно задать, просто определив вероятности всех конфигураций. Это также возможно, если  $\mathfrak{X}$  счетно, но число точек в конфигурации фиксировано (как в нашем случае меры  $P_{\nu,N}$ ), или если мера сосредоточена на подмножестве конечных конфигураций.

Обозначим через  $\text{Conf}_N(\mathfrak{X})$  множество всех  $N$ -точечных конфигураций в  $\mathfrak{X}$ . Мера  $P_{\nu,N}$  (4.2) как раз сосредоточена на  $\text{Conf}_N(\mathfrak{X})$ . Кроме того, вероятности конфигураций по этой мере равны

$$P_{\nu,N}(l_1, \dots, l_N) = \frac{1}{Z} W(l_1) \dots W(l_N) \cdot V_N^2(l_1, \dots, l_N), \quad (4.3)$$

где в нашем конкретном случае  $W(l) = \text{Poisson}_\theta(l)$ . В общем случае точечный процесс с вероятностями конфигураций (4.3) называется *ортогональным полиномиальным ансамблем* с весовой функцией  $W(x)$ .<sup>20</sup> Название это связано с тем, что при изучении таких процессов широко используются ортогональные полиномы (с тем же весом  $W(x)$ ).

В [Оль09, Лекции 12 и 13] рассматривались корреляционные функции ортогональных полиномиальных ансамблей. Напомним основные факты, которые нам понадобятся. Корреляционные функции  $\{\rho_n\}_{n=1,2,\dots}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_n(x_1, \dots, x_n) &:= \\ &= \text{Prob}(\text{случайная конфигурация } X \text{ содержит точки } x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что  $x_i \neq x_j$ , если  $i \neq j$ . Из определения видно, что  $\rho_n$  — симметрическая функция от  $x_1, \dots, x_n$ .

Точечный процесс называется детерминантным, если существует функция  $K(x, y)$  на  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$  (называемая корреляционным ядром), такая, что

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \det [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

(для любых различных точек  $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{X}$ ).

В [Оль09, Лекция 12] было показано, что  $N$ -точечный ортогональный ансамбль является детерминантным процессом, а также было дано явное описание его корреляционного ядра. Напомним это описание.

Предположим, что вес  $W(\cdot)$  имеет конечные моменты всех порядков, то есть, что для всех  $k = 1, 2, 3, \dots$  выполнено

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} |x|^k W(x) < \infty.$$

<sup>20</sup>Разумеется, от  $W(x)$  требуется неотрицательность. Иногда также предполагают конечность моментов  $W(x)$ , см. далее. Для рассмотрения ортогонального полиномиального ансамбля необходимо предполагать, что множество  $\mathfrak{X}$  является подмножеством в  $\mathbb{R}$ .

Рассмотрим весовое пространство  $\ell^2(\mathfrak{X}, W)$ . Через  $\ell^2(\mathfrak{X})$  будем обозначать пространство  $\ell^2$  на  $\mathfrak{X}$  по считающей мере. Отображение

$$\ell^2(\mathfrak{X}, W) \rightarrow \ell^2(\mathfrak{X}), \quad f \mapsto f\sqrt{W}$$

является изометрией. В силу конечности всех моментов  $W$  пространство полиномов  $\mathbb{R}[x]$  лежит в  $\ell^2(\mathfrak{X}, W)$ . Поэтому  $\mathbb{R}[x]\sqrt{W} \subset \ell^2(\mathfrak{X})$ . Пусть  $Q$  — оператор ортогонального проектирования в  $\ell^2(\mathfrak{X})$  на подпространство

$$\text{span} \{1, x, \dots, x^{N-1}\} \sqrt{W} \subset \ell^2(\mathfrak{X}).$$

Утверждение состоит в том, что функция

$$K(x, y) = (Q\varepsilon_x, \varepsilon_y)_{\ell^2(\mathfrak{X})}, \quad x, y \in \mathfrak{X}$$

является корреляционным ядром  $N$ -точечного ортогонального ансамбля. Здесь  $\{\varepsilon_x\}_{x \in \mathfrak{X}}$  — стандартный базис в  $\ell^2(\mathfrak{X})$ . Другими словами,  $K(x, y)$  — это матрица оператора  $Q$  в базисе  $\{\varepsilon_x\}_{x \in \mathfrak{X}}$ .

### 4.3 Дискретные ортогональные многочлены. Формула Родрига

Применим сформулированные выше утверждения к нашей ситуации —  $N$ -точечному ортогональному полиномиальному ансамблю с весом  $W(l) = \text{Poisson}_\theta(l) = e^{-\theta} \frac{\theta^l}{l!}$ . Ортогональные многочлены по этой мере называются многочленами Шарлье (Charlier).

Изложим небольшой кусок общей теории ортогональных многочленов (более точно, ортогональных многочленов гипергеометрического типа), который нам понадобится. Намного более подробно см. в книге [НСУ85]. С этого момента предполагается, что  $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .<sup>21</sup> Рассмотрим следующие операторы в пространстве функций на  $\mathbb{Z}$  (так называемые *разностные производные* «вперед» и «назад»):

$$\Delta f(x) := f(x+1) - f(x), \quad \nabla f(x) := f(x) - f(x-1).$$

Ортогональные полиномы  $p_0(x) = 1, p_1(x), p_2(x), \dots$  с весом  $W(x)$  однозначно (с точностью до постоянного множителя) характеризуются условиями

$$(p_n, f)_{\ell^2(\mathfrak{X}, W)} = 0 \quad \text{для всех полиномов } f \text{ с } \deg f \leq n-1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

**Предложение 4.3** (формула Родрига). *Для ортогональных полиномов справедливо представление*

$$p_n = \frac{\nabla(W p_{n-1})}{W},$$

<sup>21</sup>Можно также считать (для удобства), что  $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}$ , так как формула для пуассоновского веса  $W(x) = \text{Poisson}_\theta(x)$  при  $x < 0$  автоматически дает нуль (из-за  $x!$  в знаменателе).

или

$$p_n = (W^{-1} \circ \nabla \circ W) p_{n-1},$$

где здесь под  $W$  понимается оператор умножения на функцию  $W(x)$ .

Последовательное применение формул выше дает

$$p_n = \frac{\nabla^n W}{W}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

*Доказательство.* Покажем, что полиномы  $p_n$ , определенные как  $\frac{\nabla^n W}{W}$ , удовлетворяют условиям ортогональности (4.4). При этом будем пользоваться некоторыми дополнительными предположениями относительно веса  $W(x)$  (которым заведомо удовлетворяет наш пуассоновский вес).

Во-первых, по индукции ясно, что  $\deg p_n = n$ . Докажем условия ортогональности (также по индукции). Возьмем полином  $g$  на  $\mathbb{Z}$  с  $\deg g \leq n-1$ . Запишем

$$(p_n, g)_{\ell^2(x, W)} = \sum_{x \in \mathbb{Z}} p_n(x) g(x) W(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \nabla (W p_{n-1})(x) g(x).$$

Воспользуемся тем, что если функция  $f$  на  $\mathbb{Z}$  зануляется слева и достаточно быстро убывает справа, то выполнено

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} (\nabla f)(x) g(x) = - \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x) (\Delta g)(x).$$

В нашей ситуации (когда вес  $W$  — пуассоновский) этим фактом можно пользоваться, поэтому запишем (здесь  $f = W p_{n-1}$ )

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} \nabla (W p_{n-1})(x) g(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} W(x) p_{n-1}(x) (\Delta g)(x) = 0$$

в силу предположения индукции, так как операция  $\Delta$  понижает степень полинома.  $\square$

#### 4.4 Многочлены Шарлье

Итак, мы рассматриваем вес  $W(x) := \text{Poisson}_\theta(x) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}$  на  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Ортогональные полиномы по этому весу называются полиномами Шарлье. Формула Родрига (ее рекуррентная запись) для них выглядит следующим образом:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) - \frac{x}{\theta} p_{n-1}(x-1), \quad p_0(x) = 1.$$

Для полиномов Шарлье существует и явная формула (которую можно вывести из формулы Родрига):

$$p_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{n \downarrow m}{(-\theta)^m m!} x \downarrow m.$$

Здесь  $a^{\downarrow m} := a(a-1)\dots(a-m+1)$  — убывающая факториальная степень.

Многочлены Шарлье можно выразить через гипергеометрическую функцию

$${}_2F_0 \left( \begin{matrix} a & b \\ - & \end{matrix} \middle| z \right) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{m!} z^m.$$

Здесь  $(a)_m := a(a+1)\dots(a+m-1)$  — символ Похгаммера. Легко видеть, что  $x^{\downarrow m} = (-1)^m (-x)_m$ , поэтому для многочленов Шарлье имеем

$$p_n(x) = {}_2F_0 \left( \begin{matrix} -n & -x \\ - & \end{matrix} \middle| -\frac{1}{\theta} \right).$$

#### 4.5 Многочлены Шарлье и разностные операторы второго порядка

Теперь мы покажем, что полиномы Шарлье являются собственными функциями некоторого разностного оператора второго порядка.<sup>22</sup>

**Предложение 4.4.** *Выполнено*

$$\theta p_n(x+1) + x p_n(x-1) - (x+\theta)p_n(x) = -n p_n(x).$$

*Другими словами, многочлены Шарлье являются собственными функциями оператора*

$$(Df)(x) = \theta f(x+1) + x f(x-1) - (x+\theta)f(x)$$

*с собственными значениями  $0, -1, -2, \dots$*

*Доказательство.* Упражнение 4.3. □

Нам будет удобнее работать в обычном  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  (по считающей мере), а не в весовом пространстве  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$ , в котором действует оператор  $D$ , определенный выше. Мы уже рассматривали изометрию  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ ,  $f \mapsto f\sqrt{W}$ . При этой изометрии оператор  $D$  переходит в оператор  $W^{\frac{1}{2}} \circ D \circ W^{-\frac{1}{2}}$ . Поэтому справедливо следующее утверждение:

**Предложение 4.5.** *Функции  $p_n\sqrt{W} \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  являются собственными функциями (с собственными значениями  $0, -1, -2, \dots$ ) оператора второго порядка в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ :*

$$(D_\theta \varphi)(x) = \sqrt{\theta(x+1)}\varphi(x+1) + \sqrt{\theta x}\varphi(x-1) - (x+\theta)\varphi(x),$$

где  $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ .

**Замечание 4.6.** Оператор  $D_\theta$  можно рассматривать и как действующий в  $\ell^2\mathbb{Z}$ , так как этот оператор все равно «видит», что функция  $\varphi(x)$  живет на  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

<sup>22</sup>Отметим, что этот факт весьма общий для многих семейств ортогональных полиномов и вытекает из некоторых условий на весовую функцию.

Искомое корреляционное ядро  $K(x, y)$  для точечного процесса  $P_{\nu, N}$  (где, напомним,  $\theta = \frac{\nu}{N}$ ) — это матрица оператора проекции на подпространство  $\{p_i \sqrt{W}\}_{i=0}^{N-1} \subset \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ . Другими словами, мы хотим описать спектральный проектор на часть спектра  $\{0, -1, -2, \dots, -(N-1)\}$  оператора  $D_\theta$ . Однако, чтобы утверждать, что эти два проектора — один и тот же оператор, необходимо проверить, что спектр  $\{0, -1, -2, \dots\}$  оператора  $D_\theta$  в пространстве  $\mathbb{R}[x] \sqrt{W}$  есть также и спектр в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ . Другими словами, необходимо убедиться, что пространство полиномов  $\mathbb{R}[x]$  плотно в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$ .

**Замечание 4.7.** Тот факт, что пространство полиномов  $\mathbb{R}[x]$  плотно в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$ , является достаточно общим. Он связан с проблемой моментов — проблемой однозначности определения вероятностной меры по последовательности ее моментов. Если моменты веса  $W$  растут не слишком быстро, то пространство полиномов  $\mathbb{R}[x]$  плотно в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$ . О проблеме моментов см. [Ахиб1, Sim98].

В нашем случае, когда вес  $W$  — это пуассоновская мера, не требуется достаточно тонких условий однозначной разрешимости проблемы моментов (и, соответственно, плотности  $\mathbb{R}[x]$  в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$ ). Идея состоит в рассмотрении преобразования Фурье

$$\widehat{W}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} W(dx)$$

и требования, чтобы  $\widehat{W}(z)$  была вещественно-аналитической функцией в окрестности  $z = 0$ . Далее можно сослаться на то, что коэффициенты Тейлора функции  $\widehat{W}(z)$  и есть моменты  $W$ , а также на то, что функции  $e^{izx}$  плотны в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$  (как функции от  $x$ ).

Таким образом, мы знаем, что  $\mathbb{R}[x] \sqrt{W} \subset \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  — плотное подпространство. Это позволяет трактовать оператор  $D_\theta$  в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  как самосопряженный, так как оператор  $D_\theta$  имеет в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  диагональный базис  $p_n \sqrt{W}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и  $D_\theta(p_n \sqrt{W}) = -np_n \sqrt{W}$ . В качестве области определения  $D_\theta$  возьмем

$$\{f \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}) : D_\theta f \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})\}.$$

Теперь мы можем дать другую трактовку корреляционного ядра  $K$  (и соответствующего проектора) с использованием спектральной теоремы для самосопряженных (не обязательно ограниченных) операторов. Спектральная теорема утверждает, что любой самосопряженный оператор эквивалентен оператору умножения на функцию  $x$  в пространстве  $L^2(\bigsqcup \mathbb{R}, \mu)$ , где  $\mu$  — некоторая мера, называемая спектральной мерой.<sup>23</sup> Пространство  $\bigsqcup \mathbb{R}$  — это дизъюнктивное объединение некоторого (не более чем счетного) количества прямых. В нашем случае для оператора  $D_\theta$  требуется одна прямая, так как каждое его собственное значение имеет кратность 1. Спектральная мера  $\mu$  сосредоточена на спектре — в нашем случае она имеет атомы в точках

<sup>23</sup>На самом деле, важна не сама мера  $\mu$ , а ее класс эквивалентности (две меры называются эквивалентными, если каждая из них абсолютно непрерывна относительно другой).

$\{0, -1, -2, \dots\}$ . Спектральный проектор на  $\{-0, -1, \dots, -(N-1)\}$  эквивалентен в  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$  оператору умножения на индикатор этого куска спектра, то есть, на функцию  $I_{\{-(N-1), \dots, -1, 0\}}(x)$ . Можно также рассматривать оператор умножения на любую функцию  $I_B$ , где  $B$  — любое борелевское множество.

#### 4.6 Приложение к пуассонизированной мере Планшереля

Мы рассматривали точечный процесс  $P_{\nu, N}$  — пуассонизацию мер  $P_N^{(n)}$ . Этот точечный процесс является детерминантным и сосредоточен на  $N$ -точечных конфигурациях. Мы знаем, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N^{(n)} = P^{(n)}$ , где  $P^{(n)}$  — мера Планшереля на  $\mathbb{Y}_n$  — множестве диаграмм Юнга с  $n$  клетками. Мы рассматривали пуассонизацию мер Планшереля:

$$P_\nu := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!} P^{(n)}.$$

Здесь  $\nu > 0$  — параметр. Мера  $P_\nu$  является вероятностной мерой на множестве  $\mathbb{Y}$  всех диаграмм Юнга. Легко видеть, что  $P_\nu = \lim_{N \rightarrow \infty} P_{\nu, N}$ . Сейчас мы будем определять точечный процесс, который возникает при рассмотрении меры  $P_\nu$ . В его определении уже нельзя использовать прежнее соответствие между диаграммами Юнга  $\lambda \in \mathbb{Y}(N)$  с  $\leq N$  строками и точечными конфигурациями на  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ :

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \mapsto (l_1, \dots, l_N), \quad \text{где } l_i = \lambda_i + N - i.$$

При этом  $l_1 > \dots > l_N \geq 0$ .

Теперь мера  $P_\nu$  сосредоточена на множестве  $\mathbb{Y}$  всех диаграмм Юнга, и теперь каждой диаграмме Юнга  $\lambda \in \mathbb{Y}$  мы будем ставить в соответствие полубесконечную точечную конфигурацию следующим образом:

$$\mathbb{Y} \ni \lambda \mapsto \{y_1, y_2, \dots\}, \quad \text{где } y_i = \lambda_i - i + \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Отметим, что это соответствие между диаграммами Юнга и точечными конфигурациями встречалось в [Оль09, Лекция 4]. Конфигурация  $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$  лежит на сдвинутой решетке  $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . Например, диаграмме  $\lambda = (3, 3, 1)$  соответствует точечная конфигурация, изображенная на рис. 10. Число ча-



Рис. 10.

стиц справа от нуля в этой полубесконечной конфигурации равно числу дырок слева от нуля. Конфигурация плотно упакована влево начиная от достаточно большого по модулю отрицательного числа.

Можно дать интерпретацию конфигурации  $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\lambda_i - i + \frac{1}{2}\}_{i=1}^{\infty}$  в терминах модифицированных координат Фробениуса:

$$\begin{aligned} a_i &= \lambda_i - i + \frac{1}{2}, \\ b_i &= \lambda'_i - i + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где  $\lambda'$  — это транспонированная диаграмма Юнга, и  $i = 1, 2, \dots, d$ , где  $d$  — число клеток на диагонали в диаграмме Юнга.<sup>24</sup> На рис. 11 показано, что конфигурация  $\{y_i\}$  возникает, если рассмотреть границу диаграммы Юнга и на каждом вертикальном отрезке этой границы расположить частицу конфигурации.

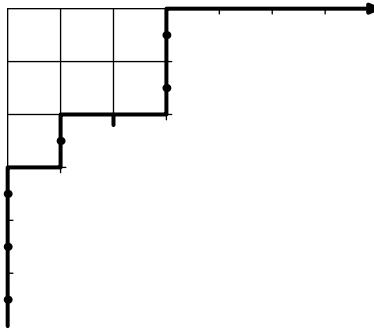


Рис. 11.

Интерпретация корреляционного ядра точечного процесса  $P_{\nu, N}$  как спектрального проектора (см. предыдущий подраздел) позволяет перейти к пределу при  $N \rightarrow \infty$  и доказать следующее утверждение (доказательство будет дано в следующей лекции):

**Предложение 4.8.** Пуассонизированная мера Планшереля  $P_{\nu}$  (точечный процесс на  $\mathbb{Z}'$ ) ассоциирована с оператором

$$(D_{\nu}^{\text{Plancherel}}) \psi(y) = \sqrt{\nu} (\psi(y+1) + \psi(y-1)) - y\psi(y).$$

Оператор  $D_{\nu}^{\text{Plancherel}}$  определен как самосопряженный оператор в  $\ell^2(\mathbb{Z}')$ . Его спектр есть  $\mathbb{Z}' \subset \mathbb{R}$ . Корреляционное ядро  $K^{\text{Plancherel}}(x, y)$  точечного процесса  $P_{\nu}$  есть ядро спектрального проектора на положительную часть спектра.

## 4.7 Упражнения

**Упражнение 4.1.** Покажите, что если функция  $f$  на  $\mathbb{Z}$  зануляется слева и достаточно быстро убывает справа, то выполнено

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} (\nabla f)(x) g(x) = - \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x) (\Delta g)(x).$$

<sup>24</sup>Модификация координат Фробениуса состоит в прибавлении чисел  $\frac{1}{2}$ .

**Упражнение 4.2.** Покажите, что в случае пуассоновского веса  $W(x) = \text{Poisson}_\theta(x) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}$  рекуррентная формула  $p_n = \frac{\nabla(W p_{n-1})}{W}$  переписывается в виде

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) - \frac{x}{\theta} p_{n-1}(x-1).$$

**Упражнение 4.3.** Докажите предложение 4.4.

**Указание.** Воспользуйтесь явной формулой для многочленов Шарлье и простыми тождествами для факториальных степеней типа следующих:  $(x+1)^{\downarrow m} = (x+1)x^{\downarrow(m-1)} = x^{\downarrow m} + mx^{\downarrow(m-1)}$ .

**Упражнение 4.4.** Убедитесь в том, что  $D_\theta = W^{\frac{1}{2}} \circ D \circ W^{-\frac{1}{2}}$ , где  $D$  — оператор в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}, W)$ , а  $D_\theta$  — в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  (эти операторы связаны с точечным процессом  $P_{\nu, N}$ ).

## 5 Разностные операторы второго порядка и корреляционное ядро пуассонизированной меры Планшереля

Здесь мы обсудим (на идейном уровне), как перейти от корреляционных ядер точечных процессов  $P_{\nu, N}$  к корреляционному ядру точечного процесса  $P_\nu$  на  $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ , отвечающего пуассонизированной мере Планшереля.

### 5.1 Некоторые факты о самосопряженных операторах

Для начала приведем полезные факты о (возможно, неограниченных) самосопряженных операторах в гильбертовом пространстве. Более подробно можно смотреть в [РС77], [АГ77].

Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $A$  — оператор в  $H$ . Предполагаем, что  $A$  может быть неограниченным, то есть, что  $A$  определен не всюду. Обозначим область определения  $A$  через  $\text{Dom}(A)$ . Будем всегда предполагать, что область определения  $\text{Dom}(A)$  плотна в  $H$ . Таким образом,

$$A: \text{Dom}(A) \rightarrow H, \quad \overline{\text{Dom}(A)} = H.$$

Оператор  $A$  называется симметричным, если

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi) \quad \text{для всех } \varphi, \psi \in \text{Dom}(A).$$

(здесь  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $H$ ).

**Пример 5.1.** Рассмотрим нужный нам пример:  $H = \ell^2(\mathbb{Z}')$ , и  $A$  — разностный оператор второго порядка:

$$(A\varphi)(x) = a_+(x)\varphi(x+1) + a_-(x)\varphi(x-1) - a_0(x)\varphi(x). \quad (5.1)$$

Предполагаем, что функции  $a_\pm$  и  $a_0$  — вещественные (а само пространство  $H$  — комплексное). Ответим на вопрос, когда оператор  $A$  является симметричным. В пространстве  $H$  существует канонический базис  $\{\varepsilon_x\}_{x \in \mathbb{Z}'}$ .

Матрица оператора  $A$  в этом базисе имеет трехдиагональный вид. Более подробно,

$$A\varepsilon_x = a_-(x+1)\varepsilon_{x+1} + a_+(x-1)\varepsilon_{x-1} - a_0(x)\varepsilon_x.$$

Видно, что оператор  $A$  симметричен тогда и только тогда, когда

$$a_+(x) = a_-(x+1) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{Z}'. \quad (5.2)$$

Теперь вернемся к общей ситуации:  $A: \text{Dom}(A) \rightarrow H$  — симметричный оператор. Определим сопряженный оператор  $A^*$  по формуле

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi).$$

Возникает вопрос, какова область определения оператора  $A^*$ .

Для начала дадим наводящее соображение. Отметим, что если  $\psi \in \text{Dom}(A^*)$ , то ясно, что отображение  $\varphi \mapsto (\varphi, A^*\psi)$  является непрерывным (по  $\varphi$ ). Поэтому какой-то вектор  $\psi$  входит в область определения  $A^*$ , если отображение  $\varphi \mapsto (A\varphi, \psi)$  непрерывно (по  $\varphi$ ). Действительно, если это отображение (линейный функционал) непрерывно по  $\varphi$ , то по теореме Рисса, существует вектор (обозначаемый через  $A^*\psi$ ), такой, что

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi) \quad \text{для всех } \varphi \in \text{Dom}(A).$$

Поэтому

$$\text{Dom}(A^*) = \{\psi \in H: \text{линейный функционал } \varphi \mapsto (A\varphi, \psi) \text{ непрерывен (по } \varphi)\}.$$

Видно, что  $\text{Dom}(A^*) \supseteq \text{Dom}(A)$ .

Дадим одно из самых важных определений.

**Определение 5.2.** Оператор  $(A, \text{Dom}(A))$  в  $H$  называется *самосопряженным*, если

- $\text{Dom}(A) = \text{Dom}(A^*)$ ,
- $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$  для всех  $\varphi, \psi \in \text{Dom}(A)$ .

Прокомментировать это определение можно с использованием преобразования Кэли, которое устанавливает связь между самосопряженными и унитарными операторами:

$$z \mapsto u = \frac{i-z}{i+z}, \quad z, u \in \mathbb{C}.$$

Это преобразование переводит верхнюю полуплоскость во внутренность единичного круга, при этом действительная прямая переводится в единичную окружность с выколотой точкой  $u = -1$ . Обратное преобразование имеет вид

$$u \mapsto z = i \frac{1-u}{1+u}.$$

Преобразование Кэли можно применять и к симметричным операторам  $(A, \text{Dom}(A))$  в гильбертовом пространстве  $H$ :

$$A \mapsto U := (i1 - A)(i1 + A)^{-1}.$$

Если оператор  $A$  симметричный, то  $U$  — частичная изометрия в гильбертовом пространстве (то есть, оператор, определенный не всюду, который действует на своей области определения как изометрический по отношению к скалярному произведению в  $H$ ). Если оператор  $A$  самосопряженный, то оператор  $U$  — унитарный. Отсюда видно, что не каждый симметричный оператор можно расширить до самосопряженного, так как не всякую частичную изометрию можно расширить до унитарного оператора.<sup>25</sup>

Дадим еще одно очень важное определение.

**Определение 5.3.** Оператор  $(A, \text{Dom}(A))$  в гильбертовом пространстве  $H$  называется *в существенном самосопряженным* (essentially self-adjoint), если у оператора  $A$  существует замыкание  $\bar{A}$ , которое само является самосопряженным оператором.

Определим понятие замыкания оператора. У каждого оператора  $A$  в гильбертовом пространстве  $H$  есть график, то есть, подпространство в  $H \oplus H$ , составленное из векторов  $\varphi \oplus A\varphi$ , где  $\varphi$  пробегает  $\text{Dom}(A)$ . Можно рассмотреть замыкание графика оператора  $A$  в пространстве  $H \oplus H$ . Если это замыкание по-прежнему останется графиком линейного оператора в  $H$ , то этот оператор и называется *замыканием* оператора  $A$  и обозначается через  $\bar{A}$ .

Обычно работают не с самосопряженными операторами, а с операторами, в существенном самосопряженными. Причина этого в том, что обычно не удается полностью описать  $\text{Dom}(A)$  для самосопряженного оператора. Гораздо чаще рассматривают оператор  $(A, \text{Dom}(A))$ , где подпространство  $\text{Dom}(A)$  достаточно просто описывается, и доказывают, что оператор  $(A, \text{Dom}(A))$  в существенном самосопряженный.

Для нашего оператора  $A$  (5.1) в  $\ell^2(\mathbb{Z}')$  в качестве области определения можно взять финитные функции на решетке, то есть

$$\text{Dom}(A) = \text{span} \{ \varepsilon_x \}_{x \in \mathbb{Z}'}.$$

Кроме того, легко видеть, что эта область определения также является инвариантным подпространством для оператора  $A$ . Будет ли так определен оператор  $(A, \text{Dom}(A))$  в существенном самосопряженным, зависит от поведения функций  $a_{\pm}$  и  $a_0$ . Более подробно об этом см. в книге [PC77].

<sup>25</sup>Например, существует частичная изометрия, которая отображает гиперплоскость в  $H$  (подпространство коразмерности 1) на все пространство  $H$ . Ясно, что эту частичную изометрию нельзя расширить до унитарного оператора.

## 5.2 Разностные операторы, соответствующие мерам $P_{\nu,N}$ и их (в существенном) самосопряженность

Напомним, что мы рассматривали меры  $P_{\nu,N}$  на  $\mathbb{Y}(N)$  (множестве диаграмм Юнга с  $\leq N$  строчками) — пуассонизацию мер  $P_N^{(n)}$  на  $\mathbb{Y}_n(N)$ , которые, в свою очередь, возникли из двойственности Шура–Вейля. Мы отождествляли множество  $\mathbb{Y}(N)$  с  $\text{Conf}_N(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  — пространством  $N$ -точечных конфигураций на полурешетке  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Возникал  $N$ -частичный точечный процесс на  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ . С ним был связан разностный оператор второго порядка  $D_\theta$  в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ , где  $\theta := \frac{\nu}{N} > 0$ . Собственными функциями оператора  $D_\theta$  являются многочлены Шарлье (мы обозначаем их через  $p_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), умноженные на корень из весовой функции.<sup>26</sup>

В этом подразделе мы будем заниматься оператором  $D_\theta$ . Этот оператор имеет вид

$$(D_\theta \varphi)(x) = \sqrt{\theta(x+1)}\varphi(x+1) + \sqrt{\theta x}\varphi(x-1) - (x+\theta)\varphi(x), \quad \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}). \quad (5.3)$$

Видно, что условие (5.2) выполнено, то есть, оператор  $D_\theta$  является симметричным. Существует две возможности выбора области определения оператора  $D_\theta$ :

- $\text{Dom}_1(D_\theta)$  состоит из всех финитных функций на  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ;
- $\text{Dom}_2(D_\theta) = \mathbb{R}[x]\sqrt{W} \subset \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  состоит из всех многочленов, умноженных на корень из весовой функции  $W(x)$ .

Ясно, что  $\text{Dom}_1(D_\theta) \neq \text{Dom}_2(D_\theta)$ .

В предыдущей лекции мы рассматривали подпространство  $\text{Dom}_2(D_\theta) = \mathbb{R}[x]\sqrt{W}$  — доказали, что это подпространство плотно в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ , и что оператор  $D_\theta$  диагонализуется на многочленах Шарлье, умноженных на корень из весовой функции. Обозначим их через  $\tilde{p}_n(x) := p_n(x)\sqrt{W(x)}$ . Тогда

$$D_\theta \tilde{p}_n = -n\tilde{p}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Оператор  $(D_\theta, \text{Dom}_2(D_\theta))$  является в существенном самосопряженным. Кроме того, можно явно указать, каково его замыкание, то есть, явно описать область определения  $\text{Dom}(\overline{D_\theta})$ . А именно, функции  $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  можно раскладывать в ряд Фурье по  $\tilde{p}_n(x)$ . Можно показать, что

$$\text{Dom}(\overline{D_\theta}) = \left\{ \varphi = \sum_{n \geq 0} c_n \tilde{p}_n : \sum_{n \geq 0} |c_n|^2 < \infty \text{ и } \sum_{n \geq 0} n^2 |c_n|^2 < \infty \right\}.$$

Первое условие обеспечивает, что  $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ , а второе, что  $D_\theta \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  (ясно, что второе условие влечет первое). Таким образом,  $\text{Dom}(\overline{D_\theta})$  состоит из всех функций  $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ , таких, что  $D_\theta \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ . Отметим, что здесь под  $D_\theta \varphi$  понимается формальное применение оператора (5.3) к функции

<sup>26</sup>Весовая функция — это пуассоновское распределение  $W(x) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}$ .

$\varphi$  на решетке. Этого рассуждения на самом деле хватает, чтобы показать в существенном самосопряженность оператора  $(D_\theta, \text{Dom}_2(D_\theta))$ . Обозначим замыкание этого оператора через  $\overline{D}_\theta$ .

Оказывается, можно показать, что оператор  $(D_\theta, \text{Dom}_1(D_\theta))$  также является в существенном самосопряженным, и кроме того, что замыкание этого оператора совпадает с  $\overline{D}_\theta$ . Возможный способ доказательства этого факта состоит в использовании общих теорем (напр., из [РС77]), для которых требуется установить следующее: не существует функций из  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ , которые являются собственными для оператора  $D_\theta$  с не вещественным собственным значением. Практически достаточно это показать для собственного значения, равного  $i$ . Следует рассмотреть семейство разностных уравнений  $(D_\theta \varphi)(x) = i\varphi(x)$  и показать, что решение этих разностных уравнений не лежит в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ . Отметим, что другой способ доказательства (использующий более конкретные свойства оператора) в существенном самосопряженности оператора  $(D_\theta, \text{Dom}_1(D_\theta))$  описан в работе [BO07].

### 5.3 Сходимость мер $P_{\nu, N}$ к пуассонизированной мере Планшереля. Сходимость разностных операторов

В предыдущих лекциях мы рассматривали меры  $P_{\nu, N}$  на  $\mathbb{Y}(N)$  — множестве диаграмм Юнга с  $\leq N$  строчками, и меры  $P_\nu$  на  $\mathbb{Y}$  — множестве всех диаграмм Юнга. Мера  $P_\nu$  также имеет собственное название — пуассонизированная мера Планшереля. Мы установили сходимость

$$P_{\nu, N} \rightarrow P_\nu, \quad N \rightarrow \infty.$$

Сходимость здесь поточечная, на каждой фиксированной диаграмме Юнга  $\lambda \in \mathbb{Y}$  (ясно, что для достаточно большого  $N$  выполнено  $\lambda \in \mathbb{Y}(N)$ ).

Множество  $\mathbb{Y}(N)$  отождествляется с  $\text{Conf}_N(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  — множеством  $N$ -точечных конфигураций на полурешетке:

$$\mathbb{Y}(N) \ni \lambda \longleftrightarrow \underline{x} = (x_1, \dots, x_N), \quad x_i = \lambda_i + N - i.$$

Множество  $\mathbb{Y}$  — с множеством полубесконечных сбалансированных<sup>27</sup> конфигураций на  $\mathbb{Z}' := \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ :

$$\mathbb{Y} \ni \lambda \longleftrightarrow \underline{y} = (y_1 > y_2 > \dots), \quad y_i = \lambda_i - i + \frac{1}{2}.$$

Так как  $\mathbb{Y}(N) \subset \mathbb{Y}$ , то между конфигурациями  $\underline{x}$  и  $\underline{y}$  существует связь:  $x_i = y_i + N - \frac{1}{2}$  (это верно для фиксированного  $i$  и  $N \geq i$ ).

На пространстве  $\text{Conf}_N(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  мера  $P_{\nu, N}$  задает детерминантный точечный процесс, то есть, корреляционные функции этой меры имеют вид:

$$\rho_n^{P_{\nu, N}}(x'_1, \dots, x'_n) = \det [K^{P_{\nu, N}}(x'_i, x'_j)]_{i, j=1}^n,$$

<sup>27</sup>Конфигурации конечны вправо и плотно упакованы влево, число частиц справа от нуля равно числу дырок слева от нуля. См. рис. 10.

где  $x'_i$  — любые различные точки на  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Ядро  $K^{P_{\nu,N}}$  обслуживается разностным оператором  $D_\theta$ , то есть,  $K^{P_{\nu,N}}$  есть матрица спектрального проектора на собственные значения  $\{-(N-1), \dots, -1, 0\}$  оператора  $D_\theta$ .

Так как есть сходимость мер  $P_{\nu,N} \rightarrow P_\nu$ , естественно ожидать и сходимости (при каких-то сдвигах) корреляционных функций  $\rho_n^{P_{\nu,N}}$ , и корреляционного ядра  $K^{P_{\nu,N}}$  к корреляционным функциям и корреляционному ядру (соответственно) пуассонизированной меры Планшереля  $P_\nu$ . Другими словами, если установить следующую сходимость корреляционных ядер:

$$K^{P_\nu}(z', z'') = \lim_{N \rightarrow \infty} K^{P_{\nu,N}} \left( z' + N - \frac{1}{2}, z'' + N - \frac{1}{2} \right), \quad (5.4)$$

и найти ядро  $K^{P_\nu}$ , то достаточно просто понять, что точечный процесс на  $\ell^2(\mathbb{Z}')$  является детерминантным с ядром  $K^{P_\nu}$ .

**Замечание 5.4.** Отметим, что корреляционное ядро определено не канонически — преобразования вида

$$K(x, y) \mapsto \frac{f(x)}{f(y)} K(x, y), \quad (5.5)$$

где  $f$  — ненулевая функция, не меняют миноров матрицы  $K$ , а поэтому и корреляционных функций. Преобразования вида (5.5) называются *калибровочными*.

Из-за этой неоднозначности при доказательстве сходимости (5.4) выше могла бы потребоваться дополнительная калибровка допредельных ядер  $K^{P_{\nu,N}}$ . Однако в нашей ситуации этой проблемы не возникает.

Сходимость (5.4) можно устанавливать разными способами:

- Ядро  $K^{P_{\nu,N}}$  выражается через многочлены Шарлье. Используя асимптотику этих многочленов, можно явно установить сходимость (5.4). Этот способ требует вычислений со специальными функциями.
- Существует более эвристический метод, который не использует специальных функций, и который, тем не менее, приводит к нужному ответу. Он заключается в том, чтобы доказывать не сходимость корреляционных ядер, которые являются спектральными проекторами на части спектра некоторых разностных операторов, а доказывать сходимость самих разностных операторов.

Мы будем использовать второй способ. Можно предложить строгое обоснование этого способа, см. [Ols08]. Здесь изложим идейное содержание этого метода.

Как уже было сказано,  $N$ -точечные конфигурации на  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  связаны с полубесконечными сбалансированными конфигурациями на  $\mathbb{Z}'$  как

$$x = y + N - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad y \in \mathbb{Z}'.$$

Также напомним, что  $\theta = \frac{\nu}{N}$ . Будем исследовать сходимость операторов  $D_\theta = D_{\nu/N}$  при  $N \rightarrow \infty$  и при сдвиге решетки. Рассмотрим оператор  $D_\theta$  на сдвинутой решетке. Можно считать, что он действует в подпространстве  $\ell^2(\mathbb{Z}')_{>-N} \subset \ell^2(\mathbb{Z}')$ , где пространство  $\ell^2(\mathbb{Z}')_{>-N}$  состоит из функций, сосредоточенных на  $\{-N + \frac{1}{2}, -N + \frac{3}{2}, \dots\}$ . Этот сдвинутый оператор  $D_\theta^{(N)}$  действует следующим образом:

$$(D_\theta^{(N)} \varphi)(y) = \sqrt{\theta(y + N + \frac{1}{2})} \varphi(y+1) + \sqrt{\theta(y + N - \frac{1}{2})} \varphi(y-1) - (y + \theta + N - \frac{1}{2}) \varphi(y).$$

Пусть  $Q_{\{-(N-1), \dots, -1, 0\}}(D_\theta^{(N)})$  обозначает проектор на часть спектра  $\{-(N-1), \dots, -1, 0\}$  оператора  $D_\theta^{(N)}$ . Матрица этого оператора  $Q_{\{-(N-1), \dots, -1, 0\}}(D_\theta^{(N)})$  есть ядро сдвинутого  $N$ -точечного процесса на полурешетке  $\{-N + \frac{1}{2}, -N + \frac{3}{2}, \dots\}$ .

Заменим оператор  $D_\theta^{(N)}$  на

$$D_N := D_\theta^{(N)} + (N - \frac{1}{2}) \mathbf{1}.$$

Тогда ядро сдвинутого процесса есть матрица оператора проекции на часть спектра  $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, N - \frac{1}{2}\}$  оператора  $D_N$ , обозначим этот оператор через  $Q_+(D_N)$ . Можно эквивалентно сказать, что  $Q_+(D_N)$  — это спектральный проектор на положительную часть спектра оператора  $D_N$ .

Таким образом, мы зафиксировали часть спектра, на которую осуществляется проекция, и теперь наша задача — разобраться со сходимостью разностных операторов. Мы будем это делать с использованием общих определений и результатов из книги [PC77].

## 5.4 Сильная резольвентная сходимость. Сходимость операторов $D_N \rightarrow D$

Приведем нужные определения и утверждения.

**Определение 5.5** (Резольвента). Пусть  $A$  — оператор. Функция  $\zeta \mapsto (\zeta - A)^{-1}$  называется *резольвентой* оператора  $A$ . Ясно, что резольвента определена все спектра оператора  $A$ .

Например, если  $A$  — (возможно, неограниченный) самосопряженный оператор, то для всех  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  резольвента  $(\zeta - A)^{-1}$  имеет смысл, и кроме того, является ограниченным оператором.

Рассмотрение резольвент позволяет перейти от сходимости неограниченных самосопряженных (или в существенном самосопряженных) операторов<sup>28</sup> к рассмотрению сходимости ограниченных операторов — их резольвент.

**Определение 5.6** (Сильная резольвентная сходимость). Самосопряженные операторы  $A_N$  сходятся к оператору  $A$  в смысле *сильной резольвентной*

<sup>28</sup>Одна из основных проблем состоит в том, что у каждого оператора может быть своя область определения!

сходимости, если для всех  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  сходятся их резольвенты  $(\zeta - A_N)^{-1} \rightarrow (\zeta - A)^{-1}$  в смысле сильной сходимости операторов (то есть, резольвенты сходятся на каждом векторе).

Рассмотрение сильной резольвентной сходимости позволяет забыть, что у каждого оператора из последовательности самосопряженных операторов может быть своя область определения.

Теперь приведем нужные нам факты о сильной резольвентной сходимости.

**Теорема 5.7** ([PC77, Теорема VIII.24]). *Пусть самосопряженные операторы  $A_N$  сходятся к самосопряженному оператору  $A$  в смысле сильной резольвентной сходимости. Пусть  $I \subset \mathbb{R}$  — полубесконечный (скажем, вправо) интервал, такой, что его конец не лежит в спектре  $A$ . Тогда выполнена сильная сходимость спектральных проекторов на  $I$ :*

$$Q_I(A_N) \rightarrow Q_I(A), \quad N \rightarrow \infty.$$

**Теорема 5.8** ([PC77, Теорема VIII.25]). *Пусть операторы  $A_N$  и  $A$  в существенном самосопряжены на некоторой (единой для всех) плотной области  $L \subset H$ , и пусть на  $L$  выполнена сходимость*

$$A_N \varphi \rightarrow A \varphi, \quad N \rightarrow \infty, \quad \text{для всех } \varphi \in L.$$

*Тогда выполнена сходимость замыканий  $\bar{A}_N \rightarrow \bar{A}$  в смысле сильной резольвентной сходимости.*

Пользуясь этими двумя теоремами, мы можем установить сильную резольвентную сходимость операторов  $D_N$  к оператору  $D$ . Здесь операторы  $D_N$  определены выше:

$$(D_N \varphi)(y) = \sqrt{\theta(y + N + \frac{1}{2})} \varphi(y + 1) + \sqrt{\theta(y + N - \frac{1}{2})} \varphi(y - 1) - (y + \theta) \varphi(y), \quad (5.6)$$

а оператор  $D$  имеет вид:

$$(D \varphi)(y) = \sqrt{\nu} (\varphi(y + 1) + \varphi(y - 1)) - y \varphi(y). \quad (5.7)$$

Здесь  $\theta = \frac{\nu}{N}$ .

**Замечание 5.9.** Оператор  $D$  действует в  $\ell^2(\mathbb{Z}')$ . Формула (5.6) определяет оператор  $D_N$  только в подпространстве  $\ell^2(\mathbb{Z}')_{>-N}$ , состоящем из функций, сосредоточенных на  $\{-N + \frac{1}{2}, -N + \frac{3}{2}, \dots\}$ . При этом видно, что  $D_N$  зануляет базисный вектор  $\varepsilon_{-N+\frac{1}{2}}$ . На ортогональном дополнении подпространства  $\ell^2(\mathbb{Z}')_{>-N}$ , состоящем из функций, сосредоточенных на множестве  $\{\dots, -N - \frac{3}{2}, -N - \frac{1}{2}\}$ , можно положить оператор  $D_N$  равным скалярному оператору (с произвольным отрицательным собственным значением, чтобы не нарушить структуру положительной части спектра, и, тем самым, не изменить корреляционное ядро процесса  $P_{\nu, N}$ ).

В качестве плотного подпространства  $L \subset H = \ell^2(\mathbb{Z}')$  в теореме 5.8 возьмем подпространство финитных функций  $\text{span} \{\varepsilon_x\}_{x \in \mathbb{Z}'}$ . Сходимость операторов  $D_N$  (5.6) к оператору  $D$  (5.7) на финитных функциях очевидна (напомним, что  $\theta = \frac{\nu}{N}$ ). Таким образом, по теореме 5.8 выполнена и сильная резольвентная сходимость, и, в силу теоремы 5.7, проекторы  $Q_+(D_N)$  на положительную часть спектра сходятся к проектору  $Q_+(D)$ . Сходимость проекторов — это уже сильная сходимость операторов, и поэтому матрицы этих проекторов также сходятся.

Таким образом, сходимость корреляционных ядер (5.4) установлена, где корреляционное ядро предельного точечного процесса  $K^{P_\nu}$  — это матрица спектрального проектора на положительную часть спектра оператора  $D$  (5.7). Это доказывает детерминантность точечного процесса на  $\mathbb{Z}'$ , полученного из пуассонизированной меры Планшереля, и дает качественное описание корреляционного ядра этого процесса. Это ядро называется *дискретным ядром Бесселя*, оно выражается через функции Бесселя, к чему мы и перейдем в следующем подразделе.

## 5.5 Дискретное ядро Бесселя

Выше было определено дискретное ядро Бесселя  $K^{P_\nu}$  на  $\mathbb{Z}'$  — матрица спектрального проектора на положительную часть спектра разностного оператора  $D$  (5.7). Ядро  $K^{P_\nu}$  является корреляционным ядром точечного процесса на  $\mathbb{Z}'$ , полученного из пуассонизированной меры Планшереля на диаграммах Юнга. Интерпретация  $K^{P_\nu}$  как матрицы спектрального проектора важна, однако здесь мы дадим явное выражение для  $K^{P_\nu}$  через функции Бесселя.

**Определение 5.10.** Пусть  $m \in \mathbb{C}$  и  $u > 0$ . *Функция Бесселя* (первого рода) определяется следующим образом:

$$J_m(u) = \left(\frac{u}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (u/2)^{2k}}{k! \Gamma(m+k+1)}. \quad (5.8)$$

О функциях Бесселя см. [БЭ66, т. 2].

Обычно при рассмотрении функций Бесселя параметром является  $m$ , а  $u$  — аргументом. В нашем случае все наоборот. Положим

$$J_m := J_m(2\sqrt{\nu}),$$

и будем рассматривать  $J_m$  как функцию от  $m$ , причем  $m$  будет являться целым числом:

$$J_m = \frac{\nu^{m/2}}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)^k}{k!(m+1)_k} = \frac{\nu^{m/2}}{m!} {}_0F_1 \left( \begin{matrix} - \\ m+1 \end{matrix} \middle| -\nu \right).$$

Здесь  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $(m+1)_k$  — символ Похгаммера и

$${}_0F_1 \left( \begin{matrix} - \\ c \end{matrix} \middle| z \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(c)_k k!} z^k$$

— гипергеометрическая функция. Для  $m = -1, -2, \dots$  величина  $J_m$  определяется как

$$J_m = (-1)^m J_{-m}.$$

Таким образом,  $J_m$  определено для всех  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Предложение 5.11.** *Для величин  $J_m$  выполняется соотношение:*

$$\sqrt{\nu}(J_{m+1} + J_{m-1}) = mJ_m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, функции  $J_m$  (как функции на  $\mathbb{Z}$ ) удовлетворяют разностному уравнению  $DJ_m = 0$ , где оператор  $D$  определяется по формуле (5.7). Следующий шаг — определить функции

$$\psi_a(y) := J_{a+y}, \quad a, y \in \mathbb{Z}'.$$

Отметим, что для  $a, y \in \mathbb{Z}'$  число  $a + y$  уже целое. Отметим также, что функция  $\psi_a(y)$  симметрична по  $a$  и  $y$ . Функции  $\psi_a(y)$  как функции от  $y$  уже являются собственными для оператора  $D$ :

$$D\psi_a = a\psi_a, \quad a \in \mathbb{Z}'.$$

Можно показать, что функции  $\{\psi_a\}_{a \in \mathbb{Z}'}$  составляют ортогональный базис в пространстве  $\ell^2(\mathbb{Z}')$  (см., напр., [Ols08]).

Зная эти факты о функциях  $\psi_a(y)$  и некоторые другие тождества для функций Бесселя (см. [БЭ66]), можно показать, что корреляционное ядро  $K^{P_\nu}$  имеет вид

$$K^{P_\nu}(y, y') = \sqrt{\nu} \frac{J_{y-\frac{1}{2}} J_{y'+\frac{1}{2}} - J_{y+\frac{1}{2}} J_{y'-\frac{1}{2}}}{y - y'}, \quad y, y' \in \mathbb{Z}'. \quad (5.9)$$

**Замечание 5.12.** При  $y = y'$  следует забыть, что  $y, y' \in \mathbb{Z}'$  и определить значение  $K^{P_\nu}(y, y')$  по непрерывности.

Формула (5.9) была получена независимо в работах [BOO00] и [Joh01].

## 5.6 Упражнения

**Упражнение 5.1.** Проверьте, что если оператор  $A$  в  $\ell^2(\mathbb{Z}')$  действует по формуле

$$(A\varphi)(x) = a_+(x)\varphi(x+1) + a_-(x)\varphi(x-1) - a_0(x)\varphi(x),$$

то его действие в стандартном базисе имеет вид

$$A\varepsilon_x = a_-(x+1)\varepsilon_{x+1} + a_+(x-1)\varepsilon_{x-1} - a_0(x)\varepsilon_x.$$

**Упражнение 5.2.** Проверьте тождество

$$\sqrt{\nu}(J_{m+1} + J_{m-1}) = mJ_m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

для функций Бесселя  $J_m = J_m(2\sqrt{\nu})$ , определенных с помощью ряда (5.8).

## 6 Разностные операторы и исследование меры Планшереля

### 6.1 Введение и напоминание

Эта лекция имеет обзорный характер, ее цель — показать, как рассмотрение разностного оператора для меры Планшереля дает представление о многих свойствах этой меры (строго доказанных другими методами).

Напомним, что мы рассматривали пуассонизированную меру Планшереля  $P_\nu$  на множестве всех диаграмм Юнга  $\mathbb{Y}$ . Диаграммы Юнга отождествлялись с точечными конфигурациями (об этом отождествлении см. также рис. 10 и 11):

$$\mathbb{Y} \ni \lambda \rightarrow y = (y_i)_{i=1}^\infty, \quad y_i = \lambda_i - i + \frac{1}{2}. \quad (6.1)$$

Таким образом,  $y$  — полубесконечная конфигурация на решетке полуцелых чисел  $\mathbb{Z}'$ . Мера  $P_\nu$  при таком отождествлении определяет точечный процесс на  $\mathbb{Z}'$ . Этот точечный процесс является детерминантным, а его корреляционное ядро — это матрица спектрального проектора  $Q_{(0,+\infty)}(D)$  в  $\ell^2(\mathbb{Z}')$  на положительную часть спектра разностного оператора второго порядка:

$$D\varphi(y) = \sqrt{\nu}(\varphi(y+1) + \varphi(y-1)) - y\varphi(y). \quad (6.2)$$

В предыдущей лекции была приведена явная формула для корреляционного ядра меры  $P_\nu$ , это ядро называется дискретным ядром Бесселя. В этой лекции мы продолжим изучение меры  $P_\nu$ , пользуясь не явной формулой для ее корреляционного ядра, а исследуя разностный оператор  $D$ , выписанный выше.

### 6.2 Эквивалентность ансамблей

В основном нас интересует вопрос о поведении меры  $P_\nu$  при  $\nu \rightarrow \infty$ . Мера  $P_\nu$  получается при пуассонизации мер Планшереля  $P^{(n)}$ . Каждая мера  $P^{(n)}$  живет на множестве диаграмм Юнга  $\mathbb{Y}_n$  с  $n$  клетками, а мера  $P_\nu$  определяется как их смесь с помощью пуассоновского распределения:

$$P_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} P^{(n)}.$$

Мы принимаем без доказательства, что предельное поведение (понимаемое каким-либо образом) мер (точечных процессов на  $\mathbb{Z}'$ )  $P_\nu$  при  $\nu \rightarrow \infty$  и  $P^{(n)}$  при  $n \rightarrow \infty$  одинаково, и при этом  $\nu \sim n$ .

Наводящие соображения (изложенные в одной из предыдущих лекций) состоят в следующем. Чтобы разыграть случайную диаграмму по мере  $P_\nu$ , надо сначала разыграть пуассоновскую случайную величину с параметром  $\nu$ . Пусть в результате розыгрыша этой пуассоновской величины получается число  $t$ . Затем надо разыграть диаграмму с  $t$  клетками по мере Планшереля  $P^{(t)}$  на  $\mathbb{Y}_t$ . Математическое ожидание и дисперсия пуассоновской

случайной величины одинаковы и равны  $\nu$ , поэтому при больших  $\nu$  следует ожидать, что  $m$  (результат розыгрыша пуассоновской величины) лежит в интервале  $(\nu - \sqrt{\nu}, \nu + \sqrt{\nu})$ , то есть, (относительно) концентрируется вокруг  $\nu$ . Поэтому при  $\nu \rightarrow \infty$  число клеток в случайной диаграмме Юнга, распределенной по мере  $P_\nu$ , можно считать примерно равным  $\nu$ . Это и наводит на утверждение об эквивалентности ансамблей  $\{P_\nu\}_{\nu>0}$  и  $\{P^{(n)}\}_{n=0,1,2,\dots}$  (в указанном<sup>29</sup> смысле).

При рассмотрении свойств меры Планшереля ниже мы будем неявно использовать описанную эквивалентность ансамблей, которую в строгих доказательствах (о которых мы здесь не говорим) требуется устанавливать отдельно.

### 6.3 Локальное поведение вблизи границы. Дискретное синус-ядро

#### 6.3.1 Постановка задачи

Отождествление (6.1) диаграммы Юнга  $\lambda$  с точечной конфигурацией на  $\mathbb{Z}^2$  можно представлять графически (см. рис. 10 и 11). А именно, вдоль границы диаграммы Юнга  $\lambda$  “укладывается” целочисленная прямая (рис. 11),<sup>30</sup> после чего на каждом вертикальном отрезке границы размещается частица.

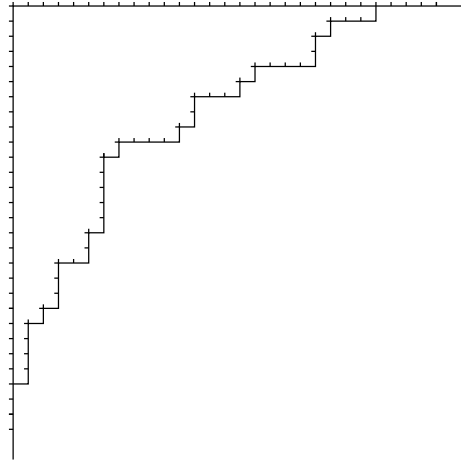


Рис. 12.

Таким образом получается полубесконечная конфигурация на решетке  $\mathbb{Z}^2$ . Если диаграмма  $\lambda$  случайна, то и конфигурация получается случайной.

<sup>29</sup>Нестрогом!

<sup>30</sup>Происходит это следующим образом. Сначала целочисленная прямая укладывается вдоль координатных лучей, а затем ее, изгибая, можно уложить вдоль границы диаграммы Юнга. См. рис. 12.

Если  $\nu$  очень велико, то из рассуждений §6.2 можно понять, что (“типичная”) случайная диаграмма  $\lambda$ , распределенная по мере  $P_\nu$ , имеет очень большое число клеток (это число порядка  $\nu$ ), см. рис. 12. Сейчас нас будет интересовать локальное поведение границы этой случайной диаграммы Юнга в окрестности какой-либо точки.<sup>31</sup> Граница представляет собой случайную бинарную последовательность. Зафиксируем число  $c \in \mathbb{R}$  и рассмотрим точку  $y_0 = 2c\sqrt{\nu}$ , разместим ее на целочисленной прямой, которая уложена вдоль координатных лучей (рис. 13). Умножение на  $2\sqrt{\nu}$  необходимо, чтобы получить невырожденное локальное поведение при  $\nu \rightarrow \infty$ . Проведем из точки  $y_0 = 2c\sqrt{\nu}$  луч под углом  $45^\circ$  до пересечения с границей диаграммы (рис. 13). Будем устремлять  $\nu$  к  $+\infty$  и наблюдать за локальным поведением границы случайной диаграммы в окрестности точки пересечения с лучом. Будет возникать случайная точечная конфигурация. На языке точечных конфигураций имеем

$$y = \tilde{y} + \left( [y_0] + \frac{1}{2} \right),$$

где  $\tilde{y}$  — новая точечная конфигурация, уже на  $\mathbb{Z}$ . Здесь мы берем целую часть  $[y_0]$ , это не влияет на асимптотику.

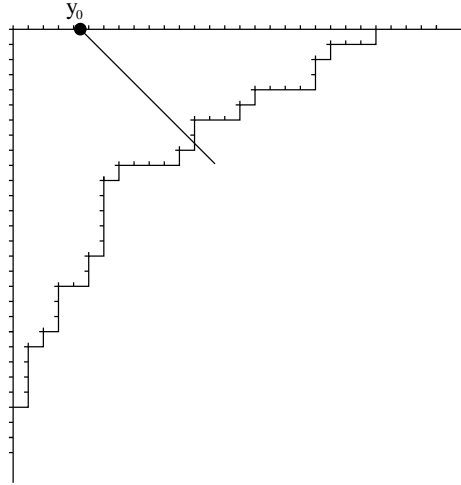


Рис. 13.

Несколько по-другому можно сказать, что мы рассматриваем случайную диаграмму Юнга, распределенную по мере Планшереля  $P_\nu$ , и сжимаем ее вдоль каждой из осей в  $\nu^{\frac{1}{2}}$  раз. На одном из координатных лучей берем точку  $2c \in \mathbb{R}$  (если  $c > 0$ , то на горизонтальном луче, а иначе — на вертикальном луче), проводим из нее луч под углом  $45^\circ$  до пересечения

<sup>31</sup>Впервые этот вопрос был исследован независимо в работах [Joh01] и [BOO00].

с границей сжатой диаграммы Юнга, и смотрим на поведение границы в *конечной* окрестности точки пересечения луча с границей.

Отметим, что заранее достаточно ясно, что полученный в пределе точечный процесс на  $\mathbb{Z}$  (который описывает локальное поведение границы) должен быть трансляционно инвариантным, то есть, распределение случайной конфигурации на  $\mathbb{Z}$  не должно меняться при сдвигах решетки. Действительно, конечный сдвиг решетки пренебрежимо мал по сравнению с нашим предельным масштабом зрения.

### 6.3.2 Идея ответа с помощью разностных операторов

Итак, рассмотрим разностный оператор  $D$  (6.2), выписанный выше. Подставим в него  $y = 2c\sqrt{\nu} + \tilde{y}$ ,  $\tilde{y} \in \mathbb{Z}$ . Отметим, что в подсчетах оператор  $D$  можно умножать/делить на любые положительные числа, так как нас интересует корреляционное ядро — матрица спектрального проектора на положительную часть спектра оператора. В результате подсчетов в координатах  $\tilde{y}$  получаем следующий разностный оператор:

$$\tilde{D}\varphi(\tilde{y}) = \varphi(\tilde{y} + 1) + \varphi(\tilde{y} - 1) - 2c\varphi(\tilde{y}). \quad (6.3)$$

Этот разностный оператор имеет постоянные коэффициенты. При работе с такими операторами часто применяют преобразования Фурье. В нашем случае все происходит на решетке, поэтому здесь мы применяем на самом деле ряды Фурье. Пусть  $\mathbb{T}$  — единичная окружность с комплексной координатой  $\zeta$ , то есть,  $\mathbb{T} = \{\zeta: |\zeta| = 1\}$ . От пространства  $\ell^2(\mathbb{Z})$  переходим к двойственному пространству  $L^2(\mathbb{T})$  с нормированной мерой Лебега (такой, что мера всей окружности есть 1). В пространстве  $L^2(\mathbb{T})$  функции  $\{\zeta^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  составляют ортонормальный базис.

Видно, что оператор  $\tilde{D}$  в  $\ell^2(\mathbb{Z})$  является трансляционно инвариантным. Поэтому его преобразование Фурье — оператор в  $L^2(\mathbb{T})$  — будет оператором умножения на функцию. Легко видеть, что эта функция имеет вид

$$\psi(\zeta) = \zeta + \zeta^{-1} - 2c = 2(\operatorname{Re} \zeta - c).$$

Как и должно быть, эта функция вещественная (так как оператор  $\tilde{D}$  эрмитов). Спектр оператора умножения на  $\psi(\zeta)$  — это множество значений  $\psi(\zeta)$ ,  $\zeta \in \mathbb{T}$ . Положительная часть спектра представляет собой дугу  $\{\operatorname{Re} \zeta \geq c\}$  окружности  $\mathbb{T} = \{|\zeta| = 1\}$ . Таким образом, специальный проектор на положительную часть спектра оператора  $\tilde{D}$  представляет собой оператор умножения на индикатор (характеристическую функцию) дуги  $\{\operatorname{Re} \zeta \geq c\}$ . Ясно, что имеет смысл рассматривать только значения  $c \in [-1, 1]$ .

Пересчитывая спектральный проектор из  $L^2(\mathbb{T})$  в  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , получим (трансляционно инвариантный) оператор свертки. Корреляционное ядро предельного процесса на  $\mathbb{Z}$  трансляционно инвариантно, то есть,

$$S(\tilde{y}, \tilde{y}') = S(\tilde{y} - \tilde{y}'),$$

и имеет вид:

$$S(k) = \begin{cases} \frac{\sin(Ak)}{\pi k}, & \text{если } k \neq 0, \\ \frac{A}{\pi}, & \text{если } k = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Здесь  $k \in \mathbb{Z}$  и  $A = \arccos c$ . Как уже было сказано, параметр  $c$  принимает значения  $-1 \leq c \leq 1$ . Это корреляционное ядро  $S$  на  $\mathbb{Z}$  называется *дискретным синус-ядром*. Оно определяет локальное поведение границы случайной диаграммы Юнга, распределенной по мере Планшереля  $P_\nu$  при  $\nu \rightarrow \infty$  (англ. bulk limit). Строгие доказательства см. в [Joh01] и [BOO00].

#### 6.4 Отступление: непрерывное синус-ядро

Дискретное синус-ядро, описанное в предыдущем подразделе, является дискретным аналогом непрерывного синус-ядра

$$S(x, y) = \frac{\sin(\pi(x - y))}{\pi(x - y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Непрерывное синус-ядро определяет (то есть, является корреляционным ядром) один из самых важных детерминантных точечных процессов.<sup>32</sup> Преобразование Фурье этого непрерывного синус-ядра представляет собой умножение на индикатор (характеристическую функцию) ступеньки. Детерминантный точечный процесс, отвечающий ядру  $S$ , впервые возник в теории случайных матриц. Также существует гипотеза, что этот точечный процесс можно получить, подходящим образом рандомизируя нули дзета-функции Римана, находящиеся на прямой  $\operatorname{Re} \zeta = \frac{1}{2}$ . Более подробно см. [Mon73], [Dys62] (возможно, еще какие-то статьи Дайсона), а также [Odl87] (и другие статьи этого автора), [BDJ99], [Dei00].

#### 6.5 Задача Улама о максимальной возрастающей подпоследовательности

В начале 1960-х гг. Улам сформулировал следующую комбинаторную задачу, которая носит его имя. Возьмем симметрическую группу  $\mathfrak{S}(n)$ . Элементы  $\mathfrak{S}(n)$  будем рассматривать как перестановочные слова (см. также лекцию 2 выше). С каждым перестановочным словом  $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$  свяжем *длину его максимальной возрастающей подпоследовательности*. Например, для  $\sigma = (4213657)$  эта длина равна 4, а максимальная возрастающая подпоследовательность в  $\sigma$  — это, например,  $(2357)$  (элементы подпоследовательности не обязательно идут подряд, а максимальных возрастающих

<sup>32</sup>Точечный процесс на  $\mathbb{R}$  — это случайная локально конечная точечная конфигурация в  $\mathbb{R}$ . Более подробно об этом см. обзоры [Sos00], [Bot09].

подпоследовательностей может быть несколько). Рассмотрим на  $\mathfrak{S}(n)$  равномерную меру, тогда длина максимальной возрастающей подпоследовательности становится целочисленной случайной величиной  $L_n$ . Улам поставил вопрос об исследовании асимптотики  $L_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Задача Улама решалась в несколько этапов. Хаммерсли показал, что существует предел по вероятности величин  $\frac{L_n}{\sqrt{n}}$ .

В 1977 Вершик и Керов [BK77] показали, что по вероятности

$$\frac{L_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 2.$$

Независимо от них в [LS77] была получена односторонняя оценка для этого предела.

Следующий член асимптотики (задача типа центральной предельной теоремы) рассматривался значительно позднее. В работе [BDJ99] было показано, что

$$L_n = 2\sqrt{n} + n^{\frac{1}{6}} \cdot U,$$

где  $U$  — некоторая случайная величина. Эта случайная величина не является гауссовской, ее распределение выражается через решение некоторого нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Пенлеве). Распределение  $U$  также может быть получено из теории случайных матриц, об этом будет сказано ниже. Еще более тонкие результаты были получены независимо в [Joh01] и [BOO00].

## 6.6 Гауссовский унитарный ансамбль и задача Улама

Рассмотрим эрмитовы матрицы размера  $N \times N$  и введем на них гауссовскую меру. Случайная матрица имеет действительные собственные значения, упорядочим их:  $x_1 \geq \dots \geq x_N$ . При  $N \rightarrow \infty$  и необходимом центрировании и нормировании ансамбль случайных точек  $\{x_i\}$  на  $\mathbb{R}$  сходится к детерминантному точечному процессу. Этот точечный процесс называется процессом Эйри (Airy). Его конфигурации имеют наибольший элемент, а влево число точек бесконечно. Распределение самой правой точки процесса Эйри и есть распределение  $U$ , возникающее в задаче Улама.

## 6.7 Мера Планшереля и задача Улама

Рассмотрим алгоритм Робинсона–Шенстеда (лекция 2), который устанавливает биекцию между множеством перестановочных слов и парами стандартных таблиц Юнга одинаковой формы с  $n$  клетками:

$$\mathfrak{S}(n) \longleftrightarrow \{(P, Q)\}.$$

Возникает проекция:  $\mathfrak{S}(n) \ni \sigma \mapsto \lambda \in \mathbb{Y}_n$ , где  $\lambda$  — общая форма таблиц  $P$  и  $Q$ . Как мы обсуждали, равномерная мера на  $\mathfrak{S}(n)$  при этой проекции переходит в меру Планшереля на  $\mathbb{Y}_n$ . Можно показать (см., напр., [Фул06]), что

при проекции  $\sigma \mapsto \lambda$  длина максимальной возрастающей подпоследовательности в  $\sigma$  есть длина максимальной строчки в  $\lambda$ , то есть, число  $\lambda_1$ . Поэтому задача Улама об асимптотике  $L_n$  равносильна задаче об асимптотике  $\lambda_1$ , если  $\lambda$  — случайная диаграмма, распределенная по мере Планшереля  $P^{(n)}$  на  $\mathbb{Y}_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Такая интерпретация задачи Улама использовалась в работе [BDJ99] для нахождения второго члена  $U$  асимптотики  $L_n$ .<sup>33</sup> В этой же работе была высказана гипотеза, что длины остальных строк  $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ , подходящим образом нормированные, сходятся к детерминантному ансамблю Эйри, который был известен из теории случайных матриц. В работе тех же авторов [BDJ00] справедливость гипотезы была установлена для  $\lambda_2$ .

В [Joh01] и [BOO00] была доказана гипотеза об асимптотике всех длин строк случайной диаграммы Юнга, имеющей распределение Планшереля. Мы покажем, как можно получить верный ответ на вопрос об асимптотике, используя разностные операторы.

## 6.8 Асимптотика меры Планшереля и разностные операторы

Пусть  $\lambda$  — случайная диаграмма, распределенная по мере Планшереля  $P_\nu$ . Определим  $u_i$  из соотношений

$$\lambda_i = 2\sqrt{\nu} + \nu^m u_i, \quad (6.5)$$

где  $m > 0$  — какой-то показатель степени. В процессе вычислений автоматически получится, что  $m = \frac{1}{6}$ . Возьмем разностный оператор (6.2) для меры Планшереля  $P_\nu$ :

$$D\varphi(y) = \sqrt{\nu}(\varphi(y+1) + \varphi(y-1)) - y\varphi(y).$$

В соответствии с (6.5) определим  $u$  из соотношения

$$y = 2\sqrt{\nu} + \nu^m u.$$

Подставим это определение в дифференциальный оператор  $D$ , то есть, от функции  $\varphi(y)$  перейдем к  $F(u)$ ,

$$\varphi(y) = F(u).$$

Приращениям  $y \pm 1$ , подставленным в  $\varphi(y)$ , соответствуют приращения функции  $F$  вида  $F(u \pm \nu^{-m})$ . Разложим их по формуле Тейлора:

$$F(u \pm \nu^{-m}) = F(u) \pm \nu^{-m} F'(u) + \frac{1}{2} \nu^{-2m} F''(u) + \dots$$

---

<sup>33</sup>Стоит отметить, что в этой работе впервые применялась техника пуассонизации меры Планшереля. Применительно к асимптотике  $\lambda_1$  была доказана эквивалентность ансамблей (см. выше).

При подсчете получим следующую асимптотику оператора  $D$ , действующего на функцию  $F(u)$ :

$$DF(u) = \nu^{\frac{1}{2}-2m} F''(u) - \nu^m F(u) + \text{младшие члены.}$$

Нас интересует предел при  $\nu \rightarrow +\infty$ . Кроме того, нам важен не сам оператор, а спектральный проектор на положительную часть его спектра. Поэтому мы можем умножить оператор  $D$  на любые положительные константы (в том числе, зависящие от  $\nu$ ). Чтобы в результате возник невырожденный предел оператора  $D$ , необходимо, чтобы  $m = \frac{1}{6}$ . Тогда, умножая оператор  $D$  на  $\nu^{-m} = \nu^{2m-\frac{1}{2}} = \nu^{-\frac{1}{6}}$ , и переходя к пределу при  $\nu \rightarrow +\infty$  (что уничтожит младшие члены), приходим к следующему дифференциальному оператору:

$$DF = F'' - uF.$$

Предельное распределение точек  $\{u_i\}$ , определенных в (6.5), представляет собой детерминантный точечный процесс, корреляционное ядро которого — матрица спектрального проектора на положительную часть спектра оператора  $D$ . Исследуя оператор  $D$  (находя его собственные функции, и и.д.), можно убедиться, что корреляционное ядро процесса  $\{u_i\}$  совпадает с ядром Эйри, полученным в теории случайных матриц.

Видно, что использование разностных операторов позволяет выдвигать верные гипотезы. В данном случае, гипотезы по показателю  $m = \frac{1}{6}$  и про то, что предельный точечный процесс управляется ядром Эйри.

## 6.9 Предельная форма диаграмм Юнга

### 6.9.1 Формулировка

Мы сформулируем теорему о предельной форме случайных диаграмм Юнга, распределенных по мере Планшереля, полученную независимо в работах [BK77] и [LS77]. После чего покажем, как можно догадаться до верного ответа (до верной формулы для предельной формы диаграммы), используя наше знание локального поведения границы случайной диаграммы Юнга (как мы знаем, это локальное поведение управляется дискретным синус-ядром, см. ранее в этой лекции).

Сначала в диаграмме Юнга перейдем от координат  $(i, j)$  ( $i$  нумерует строки,  $j$  — столбцы, как в матрицах) к координатам

$$u = \frac{j-i}{\sqrt{n}}, \quad v = \frac{j+i}{\sqrt{n}}.$$

При этом мы сразу сделаем масштабное преобразование, чтобы площадь диаграммы Юнга была равна 1 (здесь  $n$  — число клеток в диаграмме). Такая замена координат соответствует повороту осей, см. рис. 14. При этом граница диаграммы Юнга (бесконечная ломаная) может рассматриваться в координатах  $(u, v)$  как график (кусочно-линейной) функции  $v = \tilde{\lambda}(u)$ ,

$-\infty < u < +\infty$ . Отметим, что функция  $\tilde{\lambda}$  построена по уже нормированной диаграмме Юнга. Если  $\lambda$  — случайная диаграмма, распределенная по мере Планшереля на  $\mathbb{Y}_n$ , то  $\tilde{\lambda}$  — случайная ломаная. Для этой ломаной справедлива следующая предельная теорема о концентрации типа закона больших чисел:

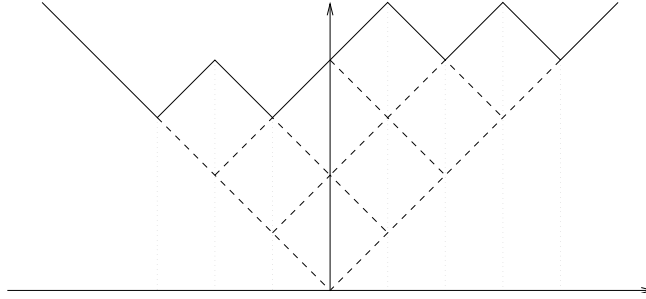


Рис. 14. Рисунок взят из статьи [Via01].

**Теорема 6.1** (Вершик–Керв–Logan–Shepp, 1977). *При  $n \rightarrow \infty$  случайная ломаная  $\tilde{\lambda}$  сходится по вероятности к предельной форме  $v = \Omega(u)$ , где  $\Omega(u)$  определяется по явной формуле:*

$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left( u \arcsin \frac{u}{2} + \sqrt{4 - u^2} \right), & |u| \leq 2; \\ |u|, & |u| \geq 2. \end{cases}$$

Сходимость по вероятности означает, что для любого фиксированного  $\varepsilon > 0$  вероятность, что ломаная  $\tilde{\lambda}$  (где  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  распределена по мере Планшереля) лежит в  $\varepsilon$ -окрестности предельной формы  $\Omega(u)$  (то есть,  $|\tilde{\lambda}(u) - \Omega(u)| < \varepsilon$ ), с ростом  $n$  стремится к единице.

Типичная (в смысле меры Планшереля) диаграмма с большим числом клеток и предельная форма изображены на рис. 15.

Отметим, что формула для производной функции  $\Omega$  значительно проще:

$$\Omega'(u) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u}{2}, \quad |u| \leq 2.$$

При интегрировании этой функции аддитивная константа выбирается так, чтобы в точках  $u = \pm 2$  функция “ложилась” на прямые  $v = \pm u$  (см. рис. 15).

### 6.9.2 Идея доказательства с использованием дискретного синус-ядра

Как и в рассуждениях с синус-ядром, возьмем точку  $c \in [-1, 1]$ , отметим ее на оси  $u$ , и проведем вертикальный луч из точки  $c$  до пересечения с границей диаграммы Юнга (представьте это на рис. 15). В окрестности

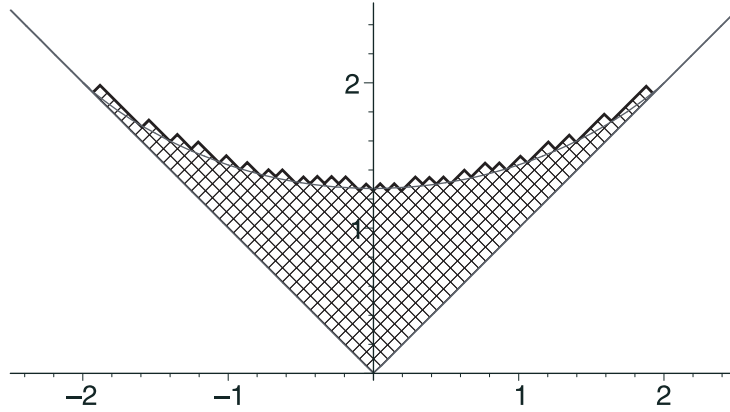


Рис. 15. Рисунок взят из статьи [ВОО00].

точки пересечения локальное поведение границы диаграммы регулируется синус-ядром (6.4) с параметром  $A = \arccos c$ . Таким образом, локально возникает детерминантный точечный процесс. Его первая корреляционная функция есть константа<sup>34</sup>  $\rho = S(0) = \frac{A}{\pi} = \frac{1}{\pi} \arccos c$ . Физический смысл числа  $\rho$  — плотность частиц в детерминантном процессе на  $\mathbb{Z}$ .

Теперь пусть  $c \in [-1, 1]$  — переменная, и кроме того, пусть  $c = \frac{u}{2}$ , где  $u \in [-2, 2]$  — естественная переменная в координатах на рис. 15. Тогда  $\rho(u) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{u}{2}$  — это локальная плотность частиц в точке границы с абсциссой  $u$ .<sup>35</sup> В то же время локальная плотность дырок (отсутствия части) равна  $1 - \rho$ .

Теперь вспомним, как мы определяли точечную конфигурацию по диаграмме. В данной повернутой системе координат это делается так: берем границу диаграммы, и на каждом ее отрезке с наклоном  $(-1)$  размещаем частицу, а все отрезки с наклоном  $(+1)$  оставляем пустыми (размещаем на них дырки). В итоге приходим к ключевому соображению, которое позволит догадаться до предельной формы:

В точке  $u \in [-2, 2]$  соотношение участков границы очень большой (нормированной) случайной диаграммы Юнга равно  $\frac{\rho(u)}{1-\rho(u)}$ . Доля участков с наклоном  $(-1)$  составляет  $\rho(u)$ , а доля участков с наклоном  $(+1)$  —  $(1 - \rho(u))$  (см. рис. 15).

Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\frac{\rho(u)}{1 - \rho(u)} = -\frac{\Delta i}{\Delta j} = \frac{du - dv}{du + dv},$$

так как  $j - i = u\sqrt{n}$ ,  $j + i = v\sqrt{n}$ .

<sup>34</sup>Это константа в силу трансляционной инвариантности.

<sup>35</sup>Вспомните определение корреляционных функций!

Значит, получаем

$$\frac{dv}{du} = 1 - 2\rho(u) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{u}{2} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u}{2},$$

что и дает производную  $\Omega'(u)$  искомой предельной формы.

Отметим, что в работах [BK77] и [LS77] применялся совершенно другой способ, основанный на том, что предельная форма  $\Omega(u)$  является решением некоторой вариационной задачи.

## 6.10 Меры $P_{\nu, N}$ и предельные формы

Филипп Биан (Biane) [Bia01] рассматривал задачу о предельной форме для мер  $P_{\nu, N}$ , которые связаны с двойственностью Шура–Вейля. Они сосредоточены на множестве диаграмм Юнга с  $\leq N$  строчками. В работе [Bia01] изучалось предельное поведение этих мер, когда  $\nu$  и  $N$  стремятся к бесконечности. При этом можно управлять относительной скоростью стремления  $\nu$  и  $N$  к бесконечности:  $\text{const} = \frac{\sqrt{\nu}}{N}$  (или  $\frac{\sqrt{n}}{N}$ ). На рис. 16 представлены различные формы для разных значений этой константы. В следующей лекции будет показано, как получить уравнения для этих предельных форм с использованием разностных операторов.

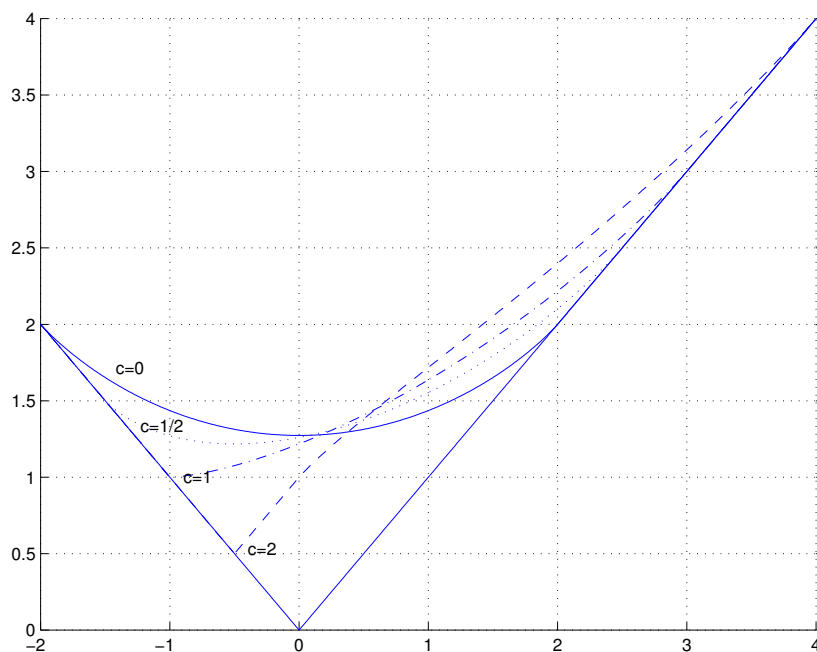


Рис. 16. Рисунок взят из статьи [Bia01].

## 7 Пределные формы случайных диаграмм по мерам $P_N^{(n)}$

В этой лекции мы обсудим предельное поведение мер  $P_N^{(n)}$ , связанных с двойственностью Шура–Вейля (см. лекцию 1). Мера  $P_N^{(n)}$  — это вероятностная мера на множестве  $\mathbb{Y}_n(N)$  диаграмм Юнга с  $n$  клетками и  $\leq N$  строчками, которая определяется следующим образом:

$$P_N^{(n)}(\lambda) = \frac{\dim \lambda \cdot \text{Dim}_N \lambda}{N^n}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n(N).$$

В этой лекции рассматривается асимптотическое поведение мер  $P_N^{(n)}$ , когда оба параметра  $n$  и  $N$  стремятся к бесконечности.

Первым данный вопрос рассматривал С. В. Керов в работе [Кер86]. Он исследовал два предельных режима:

- $n, N \rightarrow \infty$ ,  $\frac{n}{N} \rightarrow \gamma > 0$ . В этом случае предельное поведение случайной диаграммы по мере  $P_N^{(n)}$  не отличается от предельного поведения случайной диаграммы по мере Планшереля, и возникает та же самая предельная форма  $\Omega(u)$ , рассмотренная в предыдущей лекции.

Это можно объяснить тем, что, во-первых, при  $N \rightarrow \infty$  меры  $P_N^{(n)}$  сходятся к мере Планшереля  $P^{(n)}$ , а во-вторых, линейные размеры случайной диаграммы по мере Планшереля — это примерно  $2\sqrt{n}$  (другими словами, число строк в случайной диаграмме, а также длина максимальной строки при больших  $n$  мало отличаются от  $2\sqrt{n}$ , см. предыдущую лекцию). Поэтому в данном предельном режиме ограничение  $N$  на число строк в диаграмме много больше, чем  $2\sqrt{n}$ , и асимптотически его можно не учитывать.

- $N$  фиксировано, а  $n \rightarrow \infty$ . Мы не будем говорить об этом предельном режиме.

### 7.1 Формулировка теоремы Биана

Биан в работе [Bia01] рассматривал предельное поведение случайных диаграмм по мере  $P_N^{(n)}$  при  $n, N \rightarrow \infty$ , в другом предельном режиме:

$$\sqrt{n} \sim cN, \quad c \geq 0 \text{ фиксировано.}$$

Напомним еще раз, что линейные размеры случайной диаграммы по мере Планшереля равны примерно  $2\sqrt{n}$ , так что этот предельный режим рассматривать очень естественно. В результате в работе [Bia01] возникает деформация (зависящая от  $c$ ) предельной формы Вершика–Керова–Логана–Шешпа  $\Omega(u)$ , рассмотренной в предыдущей лекции.

Как и в предыдущей лекции, в диаграмме Юнга перейдем от координат  $(i, j)$  ( $i$  нумерует строки,  $j$  — столбцы, как в матрицах) к координатам  $j - i$

и  $j + i$  (см. рис. 14).<sup>36</sup> После чего сделаем скейлинг — сожмем картинку в  $\sqrt{n}$  раз по обеим осям, то есть, в итоге, введем координаты

$$u = \frac{j - i}{\sqrt{n}}, \quad v = \frac{j + i}{\sqrt{n}}.$$

При этом граница диаграммы Юнга (бесконечная ломаная) может рассматриваться в координатах  $(u, v)$  как график (кусочно-линейной) функции  $v = \tilde{\lambda}(u)$ ,  $-\infty < u < +\infty$ . Отметим, что функция  $\tilde{\lambda}$  построена по уже нормированной диаграмме Юнга. Если  $\lambda$  — случайная диаграмма, распределенная по мере  $P_N^{(n)}$ , то  $\tilde{\lambda}$  — случайная ломаная. Теорема Биана состоит в следующем. Если  $n, N \rightarrow \infty$ , так, что  $\sqrt{n} \sim cN$  ( $c \geq 0$ ), то случайные ломаные  $\tilde{\lambda}$  сходятся по вероятности в равномерной метрике<sup>37</sup> к предельной форме, которую можно задать непрерывной функцией  $v = \Omega(c; u)$ .

Вид предельной формы  $\Omega(c; u)$  дан (для различных  $c$ ) на рис. 16. Опишем формы  $\Omega(c; u)$ . При всех  $c$  кривая  $\Omega(c; u)$  состоит из линейных частей и главной нелинейной части. Основная нелинейная часть проще всего определяется через свою производную с одним граничным условием:

- $\frac{\partial \Omega(c; u)}{\partial u} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u + c}{2\sqrt{1 + uc}}$ .
- $\Omega(c; u)|_{u=c+2} = c + 2$ , то есть, кривая в точке  $u = c + 2$  касается правого луча  $j$  (который задается уравнением  $v = u$ ).

Опишем более подробно различные случаи, все они изображены на рис. 16, взятом из статьи [Via01].

0. ( $c = 0$ ) Предельная форма совпадает с кривой Вершика–Керова–Логана–Шеппа  $\Omega(u)$ , описанной в предыдущей лекции. Нелинейная часть кривой — при  $-2 \leq u \leq 2$ , в точках  $u = -2$  и  $u = 2$  кривая касается лучей  $v = \mp u$ , соответственно.
1. ( $0 < c < 1$ ) Этот случай — достаточно «малая» деформация картины при  $c = 0$ . А именно, нелинейный участок существует при  $c - 2 \leq u \leq c + 2$ , и

$$\frac{\partial}{\partial u} \Omega(c; u)|_{u=c \pm 2} = \pm 1,$$

то есть, в точках  $u = c \pm 2$  кривая касается лучей  $v = \pm u$ .

2. ( $c > 1$ ) В этом случае возникает еще один линейный участок. Он идет от точки  $u = -\frac{1}{c}$ ,  $v = \frac{1}{c}$  до точки  $u = c - 2$ ,  $v = c - 2 + \frac{2}{c}$ , с

<sup>36</sup>Рисование диаграмм Юнга в этих координатах также называется «Russian picture», по аналогии со стандартными «English picture» и «French picture». Различие между последними двумя замечательно описано в книге Макдональда [Мак84], в начале §1 главы I.

<sup>37</sup>Это значит, что для любого  $\varepsilon > 0$  и для всех достаточно больших  $N$  (и  $n$ , таких, что  $\sqrt{n} \sim cN$ ), случайные ломаные с вероятностью не меньше  $1 - \varepsilon$  находятся в  $\varepsilon$ -окрестности предельной формы  $\Omega(c; u)$ . При этом  $\varepsilon$ -окрестность понимается как  $\varepsilon$ -окрестность функции в равномерной метрике.

наклоном  $+1$ . В точке  $u = c - 2$  этот линейный участок переходит в нелинейный (описанный выше), причем нелинейный участок касается в точке  $u = c - 2$  этого линейного, так как  $\frac{\partial}{\partial u}\Omega(c; u)|_{u=c-2} = 1$  (здесь меняется знак, с которым раскрывается корень в знаменателе).

Ограничение на число строк в случайной диаграмме Юнга имеет порядок  $N \sim \frac{\sqrt{n}}{c}$ , и при  $c > 1$  оно становится очень существенным, изменяя всю картину. Величина  $\frac{\sqrt{n}}{c}$  также объясняет, как появляется точка  $u = -\frac{1}{c}$ . Длина самой короткой строчки в диаграмме асимптотически равна  $\frac{(c-1)^2}{c}\sqrt{n}$ .

3. ( $c = 1$ ) Этот случай — промежуточный между предыдущими двумя. Здесь линейные участки расположены так же, как в случае 1, нелинейный участок — при  $2 - c \leq u \leq c + 2$ , то есть,  $-1 \leq u \leq 3$ . Отличие состоит в том, что при  $u = -1$  нелинейный участок не касается прямой  $v = -u$ , а «втыкается» в нее. Производная  $\Omega(c; u)$  при  $c = 1$  и  $u = -1$  равна нулю.

Биан [Bia01] получил свои результаты с использованием так называемой «Free Probability» — некоммутативным вариантом теории вероятностей, придуманным Войкулеску. В следующем подразделе мы покажем, как можно угадать эти же результаты с помощью разностных операторов (примерно в том же духе, как и в предыдущей лекции).

## 7.2 Вывод формул для $\Omega(c; u)$

Во-первых, рассмотрим пуассонизацию мер  $P_N^{(n)}$  с параметром  $\nu > 0$ . Это снимает ограничения на число клеток в случайной диаграмме Юнга, и вероятностная мера  $P_{\nu, N}$  сосредоточена на  $\mathbb{Y}(N)$  — множестве диаграмм Юнга с  $\leq N$  строками. Эквивалентность ансамблей (см. предыдущую лекцию) здесь заключается в том, что предел при  $n \rightarrow \infty$  заменяется на предел при  $\nu \rightarrow \infty$ . При этом соотношение между  $n$  и  $N$  переходит в соотношение  $\sqrt{\nu} \sim cN$ ,  $N \rightarrow \infty$ .

Диаграмме Юнга  $\lambda \in \mathbb{Y}(N)$  ставится в соответствие  $N$ -точечная конфигурация  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_N)$ , где  $x_i = \lambda_i - i + N$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Эта конфигурация живет на  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Мера  $P_{\nu, N}$  определяет детерминантный точечный процесс на  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ , а его ядро — это матрица оператора спектрального проектирования на часть спектра  $\{-(N-1), \dots, -1, 0\}$  разностного оператора второго порядка

$$(D\varphi)(x) = \sqrt{\theta(x+1)}\varphi(x+1) + \sqrt{\theta x}\varphi(x-1) - (x+\theta)\varphi(x), \quad x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Здесь  $D$  — оператор в  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ , а  $\theta := \frac{\nu}{N}$ .

Для удобства будем рассматривать оператор  $D + (N-1)\mathbf{1}$ , тогда корреляционное ядро процесса  $P_{\nu, N}$  будет матрицей спектрального проектора на часть спектра  $\{0, 1, \dots, N-1\}$  оператора  $D + (N-1)\mathbf{1}$ . Имеем

$$((D + (N-1)\mathbf{1})\varphi)(x) = \sqrt{\theta(x+1)}\varphi(x+1) + \sqrt{\theta x}\varphi(x-1) - (x+\theta-N+1)\varphi(x).$$

Изучаем структуру границы случайной диаграммы по мере  $P_{\nu, N}$ , как в предыдущей лекции. Выберем и зафиксируем  $u \in \mathbb{R}$ , поставим точку  $u$  как на рис. 13, проведем из нее луч, параллельный главной диагонали, до пересечения с границей диаграммы. Другими словами, для изучения локальной структуры границы надо перейти к координате  $y \in \mathbb{Z}$ , которая связана с  $x$  следующим образом:

$$x = \lceil \sqrt{\nu} \rceil + N + y, \quad x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad y \in \mathbb{Z}.$$

Для того, чтобы понять локальное поведение границы, остается переписать оператор  $D + (N - 1)\mathbf{1}$  в координатах  $y$ , и перейти к пределу при  $N \rightarrow \infty$  и  $\sqrt{\nu} \sim cN$ . При этом пользуемся тем, что

$$\begin{aligned} x &\sim \sqrt{\nu} + N + y; \\ N &\sim c^{-1}\sqrt{\nu}, \\ \theta &= \frac{\nu}{N} = c\sqrt{\nu}, \\ \sqrt{\theta x} &\sim \sqrt{\theta(x+1)} \sim \sqrt{\nu}\sqrt{1+uc}; \\ -(x+\theta-N+1) &\sim -\sqrt{\nu}(u+c). \end{aligned}$$

При переходе к пределу делим оператор на  $\sqrt{\nu}\sqrt{1+uc} > 0$ , так как нас интересует проектор на неотрицательную часть спектра. На функции  $F(y)$ ,  $y \in \mathbb{Z}$ , предельный оператор действует следующим образом:

$$F(y) \mapsto F(y+1) + F(y-1) - 2\frac{u+c}{2\sqrt{1+uc}}F(y).$$

Здесь  $\frac{u+c}{2\sqrt{1+uc}}$  — константа, а весь оператор уже возникал (с другой константой) в предыдущей лекции при рассмотрении того же вопроса о локальном поведении границы по мере Планшереля. Таким образом, получаем ответ:

**Предложение 7.1.** *При  $\nu \rightarrow \infty$  и  $N \sim c^{-1}\sqrt{\nu}$ , локальное предельное поведение границы случайной диаграммы по мере  $P_{\nu, N}$  описывается трансляционно инвариантным дискретным синус-ядром*

$$S(y, y') = S(y - y'), \quad S(k) = \begin{cases} \frac{\sin(Ak)}{\pi k}, & k \neq 0; \\ \frac{A}{\pi}, & k = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$A = \arccos \frac{u+c}{2\sqrt{1+uc}}.$$

Напомним, что исследование дифференциального оператора на решетке  $\mathbb{Z}$  с постоянными коэффициентами (действующего на функцию  $F(y)$ ) можно легко провести с помощью преобразования Фурье.

Функция плотности частиц в точке  $u$  имеет вид

$$\rho(u) = S(0) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{u+c}{2\sqrt{1+uc}}.$$

Она определяет соотношение между вертикальными и горизонтальными участками границы диаграммы, и поэтому для предельной формы (точнее, для ее нелинейной части) выполнено

$$\frac{\partial \Omega(c; u)}{\partial u} = 1 - 2\rho(u) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u + c}{2\sqrt{1 + uc}}.$$

Таким образом, рассуждения с разностными операторами позволяют получить вид предельной формы для меры  $P_{\nu, N}$  (а стало быть, и для  $P_N^{(n)}$ ) при  $N, n \rightarrow \infty$  и  $\sqrt{n}/N \sim c \geq 0$ . Отметим еще раз, что данные рассуждения еще ничего не доказывают.

### 7.3 Предельное поведение самых больших и самых маленьких строк случайной диаграммы

Рассмотрим предельное поведение случайных диаграмм по мере  $P_{\nu, N}$ , и рассмотрим вопрос о поведении самых длинных или самых коротких строк в диаграмме. Пусть сначала  $c \neq 1$ . Тогда (см. рис. 16) в правом и в левом конце нелинейная часть границы касается линейной части (возникает так называемый «soft edge»). Можно показать, что флуктуации длин строк в таких точках имеют порядок  $\sim n^{\frac{1}{6}}$ , и при определенном центрировании и нормировании их предельное поведение описывается детерминантным процессом, связанным с ядром Эйри. При  $c = 1$  в правом конце нелинейной части границы возникает та же ситуация. Посмотрим подробнее, что происходит в левом конце нелинейной части границы.

При  $c = 1$  и  $u = -1$  имеем

$$\frac{\partial \Omega(u; c)}{\partial u} = 1 - 2\rho(u) = 0,$$

то есть,  $\rho(u) = \frac{1}{2}$ . Таким образом, в этой точке доля вертикальных и горизонтальных частей одинакова. На самом деле, в пределе  $N \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{n} \sim N$  без скейлинга в области самых коротких строк диаграммы возникает нетривиальная локальная структура.

Нас интересуют строки  $0 \leq \lambda_N \leq \lambda_{N-1} \leq \dots$ , или, в терминах  $x_i$ ,

$$x_N = \lambda_N, \quad x_{N-1} = \lambda_{N-1} + 1, \quad \dots$$

Смотрим на их предельное поведение без скейлинга по  $x$ . Оказывается, следует рассматривать не просто  $N \sim n^{\frac{1}{2}}$ , а более тонкую асимптотику вида

$$N = n^{\frac{1}{2}} - sn^{\frac{1}{4}} + o(n^{\frac{1}{4}}),$$

где  $s$  — еще один параметр. В терминах пуассонизированных мер, это означает  $\nu \sim N^2 + sN^{\frac{3}{2}}$ . Подставляя это в разностный оператор  $D$ , соответствующий мерам  $P_{\nu, N}$ , и переходя к пределу, получим разностный оператор на полурешетке  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ :

$$\psi(x) \mapsto \sqrt{x+1}\psi(x+1) + \sqrt{x}\psi(x) - s\psi(x)$$

Другими словами, предельное поведение самых коротких строк описывается детерминантным процессом, корреляционное ядро которого есть матрица спектрального проектора на часть спектра оператора

$$\psi(x) \mapsto \sqrt{x+1}\psi(x+1) + \sqrt{x}\psi(x),$$

лежащую в луче  $[s, +\infty]$ . Этот разностный оператор можно исследовать, у него чисто непрерывный простой лебеговский спектр. Его корреляционное ядро выражается через полиномы Эрмита и называется дискретным ядром Эрмита (индексы полиномов работают в качестве аргументов). Более подробно см. в работе [BO07].

#### 7.4 Замечание о характерах $U(\infty)$

Меры  $P_N^{(n)}$  связаны с задачей классификации характеров бесконечномерной унитарной группы  $U(\infty)$ , которая рассматривалась в первой части лекций [Оль09]. А именно, пусть  $\Phi(u)$ ,  $|u| = 1$  — функция Войкулеску,

$$\Phi(u) = e^{\gamma^+(u-1) + \gamma^-(u^{-1}-1)} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^+(u-1)}{1 - \alpha_i^+(u-1)} \cdot \frac{1 + \beta_i^-(u^{-1}-1)}{1 - \alpha_i^-(u^{-1}-1)}.$$

С ней связаны вероятностные меры на сигнатурах длины  $N$  (для любого  $N$ ) следующим образом. Рассмотрим произведение  $\Phi(u_1) \dots \Phi(u_N)$ , это симметрическая функция (Лорана) от переменных  $u_1, \dots, u_N$ , ее можно разложить по функциям Шура:

$$\Phi(u_1) \dots \Phi(u_N) = \sum_{\lambda} P(\lambda) \frac{s_{\lambda}(u_1, \dots, u_N)}{\text{Dim}_N \lambda}.$$

Здесь сумма ведется по всем сигнатурам длины  $N$ , а  $P(\cdot)$  — вероятностная мера на таких сигнатурах. Если из параметров  $\alpha_i^{\pm}, \beta_i^{\pm}, \gamma^{\pm}$  оставить только  $\gamma^+$  (а все остальные обнулить), то получится мера  $P_{\nu, N}$  на неотрицательных сигнатурах длины  $N$  (то есть, на множестве  $\mathbb{Y}(N)$ ). При этом параметры  $\nu$  и  $\gamma^+$  как-то связаны.



## 8 Орбитальный интеграл, связанный с действием $U(N)$ на $H(N)$

Перейдем к новому сюжету, который по существу заключается в описании эргодических мер некоторого группового действия. Начнем с некоторых определений.

### 8.1 Определения и некоторые свойства

Пусть  $X$  — борелевское пространство.<sup>38</sup> Через  $\mathfrak{M}(X)$  обозначается множество борелевских вероятностных мер на  $X$ . Пусть  $G$  — группа, действующая на  $X$ :

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto gx.$$

**Определение 8.1.** Мера  $M \in \mathfrak{M}(X)$  называется *инвариантной* по отношению к действию группы  $G$ , если для любого измеримого (то есть, борелевского) множества  $A$  выполнено  $M(gA) = M(A)$ .

Через  $\mathfrak{M}(X)^G$  обозначим множество всех инвариантных вероятностных мер.

**Определение 8.2.** Пусть  $M \in \mathfrak{M}(X)^G$ ,  $g \in G$  и  $Y \subseteq X$  — борелевское множество. Множество  $Y$  называется *инвариантным mod 0* относительно элемента  $g$  (и меры  $M$ ), если  $M(Y \Delta gY) = 0$ .

**Определение 8.3.** Мера  $M \in \mathfrak{M}(X)^G$  называется *эргодической* (относительно действия группы  $G$ ), если для любого борелевского множества  $Y \subseteq X$ , которое инвариантно mod 0 относительно всех  $g \in G$ , выполнено  $M(Y) = 0$  или 1.

**Предложение 8.4.** Пусть  $M \in \mathfrak{M}(X)^G$ . Следующие условия эквивалентны:

1.  $M$  — эргодическая мера;
2.  $M$  является крайней точкой выпуклого множества  $\mathfrak{M}(X)^G$ ;<sup>39</sup>
3. Подпространство в  $L^2(X, M)$ , состоящее из инвариантных функций (оно обозначается через  $L^2(X, M)^G$ ) содержит лишь функции, постоянные на  $X$ .

*Доказательство.* Напомним, что действие группы  $G$  на функции определяется следующим образом. Каждому элементу  $g \in G$  сопоставляется унитарный оператор  $T_g$  в  $L^2(X, M)$ , действующий по формуле

$$(T_g f)(x) = f(g^{-1}x).$$

<sup>38</sup>Обычно под этим понимается полное сепарабельное метрическое пространство  $X$  с борелевской  $\sigma$ -алгеброй, которая порождена всеми открытыми множествами.

<sup>39</sup>То, что это множество выпукло, очевидно.

(1  $\Leftrightarrow$  3) Если  $Y \subseteq X$  —  $G$ -инвариантное mod 0 множество, то его характеристическая функция (индикатор)  $\chi_Y$  является почти инвариантной относительно действия  $G$  на функции, то есть,  $\chi_Y$  и  $T_g \chi_Y$  отличаются на множестве  $M$ -меры нуль.

С другой стороны, если  $f \in L^2(X, M)^G$ , то для любого борелевского множества  $I$  (в области значений  $f$ , то есть, в  $\mathbb{R}$  или в  $\mathbb{C}$ ) множество  $f^{-1}(I) \subset X$  является  $G$ -инвариантным mod 0.

(3  $\Rightarrow$  2) Пусть  $M$  — эргодическая мера, которая не является крайней точкой. Пусть например  $M = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)$ , где  $M_{1,2}$  — инвариантные меры. Ясно, что  $M_{1,2} \ll M$  (меры  $M_{1,2}$  абсолютно непрерывны относительно  $M$ ), поэтому существуют производные Радона–Никодима  $\frac{M_{1,2}}{M}$ . Так как меры  $M_{1,2}$  и  $M$  инвариантны, то функции  $\frac{M_{1,2}}{M}$  — почти инвариантны. Из (3) следует, что эти функции постоянны, то есть, меры  $M$ ,  $M_1$  и  $M_2$  одинаковы.

(2  $\Rightarrow$  1) Пусть  $Y$  —  $G$ -инвариантное mod 0 множество. Ясно, что  $X \setminus Y$  — также  $G$ -инвариантное mod 0 множество. Если  $Y$  имеет промежуточную меру, отличную от 0 или 1, то меру  $M$  можно сузить на  $Y$  и на  $X \setminus Y$ . Перенормируем эти сужения так, чтобы вновь получились вероятностные меры. Ясно, что эти две новые меры также будут инвариантными. Таким образом, получаем представление  $M$  в виде нетривиальной выпуклой комбинации инвариантных мер.  $\square$

**Пример 8.5.** Рассмотрим один из простейших и в то же время один из самых важных примеров — поворот окружности на иррациональный угол.

Пусть  $X = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , будем трактовать  $X$  как множество комплексных чисел с модулем 1,  $X = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ .  $M$  — (нормированная) мера Лебега на  $X$ , а группа  $G = \mathbb{Z}$ , то есть,  $G = \{g^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , где  $g$  — поворот окружности на иррациональный угол  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ :

$$gz = e^{2\pi i \theta} z, \quad z \in X.$$

Покажем, что это преобразование эргодично. Рассмотрим  $L^2(S^1, M)$ . Базис в этом пространстве составляют функции  $\{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Группа  $G$  действует на них как

$$T_g(z^n) = e^{-2\pi i \theta n} z^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Так как здесь  $n$  может меняться, из иррациональности  $\theta$  следует, что инвариантных функций, кроме кратных  $z^0 = 1$  быть не может.  $\square$

Таким образом, мера Лебега является эргодической относительно поворота окружности на иррациональный угол. Можно также показать, что мера Лебега является единственной инвариантной мерой для такого действия.

Если  $X$  — топологическое пространство,  $G$  — компактная группа, непрерывно действующая на  $X$ , то  $X$  распадается на компактные замкнутые орбиты под действием  $G$ . Модельный пример:  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $G = S^1$ , группа  $G$  действует на  $X$  поворотами вокруг начала координат. Тогда орбиты — это всевозможные окружности с центром в начале координат, а также сама

точка  $(0, 0)$ . Эргодические меры в ситуации непрерывного действия компактной группы — это в точности орбитальные меры, которые строятся следующим образом. На  $G$  есть нормированная инвариантная мера, образ которой на орбите  $G/H$  и называется орбитальной мерой. Можно показать, что других эргодических мер нет.

**Замечание 8.6.** Отметим, что две предыдущие ситуации сильно отличаются друг от друга. А именно, во второй ситуации эргодические меры это в точности орбитальные. В первой ситуации (поворот окружности на иррациональный угол) орбиты действия также есть, но их рассматривать неправильно, так как группа  $G$  не компактна. В этом случае правильной заменой орбитальных мер как раз являются эргодические меры.

## 8.2 Теорема Бохнера

Пусть теперь  $X = \mathbb{R}^n$ . Рассмотрим  $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$  — множество борелевских вероятностных мер на  $\mathbb{R}^n$ . Преобразование Фурье сопоставляет каждой мере  $M \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$  ее характеристическую функцию

$$f_M(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,y)} M(dy),$$

где  $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ . Характеристическая функция однозначно определяет меру.

**Замечание 8.7.** Можно рассматривать также преобразование Лапласа:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(x,y)} M(dy),$$

где теперь уже  $x \in \mathbb{C}^n$ . Однако, это преобразование может быть определено не для всех  $x \in \mathbb{C}^n$ .

Теорема Бохнера характеризует образ  $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$  под действием преобразования Фурье.

**Теорема 8.8** (Bochner). *Существует взаимно-однозначное соответствие (в одну сторону осуществляющееся преобразованием Фурье) между  $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$  и пространством функций  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , которые удовлетворяют следующим условиям:*

- непрерывность;
- положительная определенность;
- нормированность в нуле:  $f_M(0) = 1$ .

**Определение 8.9.** Функция на  $\mathbb{R}^n$  называется *положительно определенной*, если

- $f(-x) = \overline{f(x)}$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ ;

- Для любого конечного набора векторов  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  матрица

$$[f(x_j - x_k)]_{j,k=1}^m$$

является положительно определенной.

Эквивалентно можно сказать, что для любого конечного набора векторов  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  и любого набора  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$  выполнено

$$\sum_{j,k=1}^m c_j \bar{c}_k f(x_j - x_k) \geq 0.$$

Отметим, что в теореме Бохнера легко показать необходимость условий, которым должно удовлетворять преобразование Фурье меры. Основное утверждение состоит в том, что этих условий достаточно.

**Замечание 8.10.** На самом деле, в теореме Бохнера то пространство  $\mathbb{R}^n$ , которое стоит в определении  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  — это двойственное пространство к  $\mathbb{R}^n$ . В данном случае мы естественным образом отождествляем эти два пространства.

Пусть на  $\mathbb{R}^n$  задано действие какой-нибудь группы  $G$ , причем группа  $G$  действует линейными преобразованиями на  $\mathbb{R}^n$ . Из теоремы Бохнера видно, что образ инвариантных мер  $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)^G$  — это в точности инвариантные функции, лежащие в  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Обозначим это пространство функций через  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)^G$ .

### 8.3 Действие $U(N)$ на $H(N)$

Пусть  $X = H(N)$  — множество эрмитовых  $N \times N$  матриц (здесь  $N = 1, 2, \dots$ ).

**Замечание 8.11.** Отметим, что  $X = H(N)$  — это вещественное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(A, B) = \text{Tr}(AB), \quad A, B \in H(N).$$

Поэтому выбор  $H(N)$  вместо  $\mathbb{R}^n$  (как было в предыдущем подразделе) не вызывает дополнительных трудностей.

На пространстве  $X$  действует сопряжениями унитарная группа  $G = U(N)$ :

$$(g, A) \mapsto gAg^{-1}, \quad g \in U(N), \quad A \in H(N).$$

Группа  $G$  компактна и действует на  $H(N)$  непрерывно.

Рассмотрим множество инвариантных вероятностных мер  $\mathfrak{M}(H(N))^{U(N)}$ . Это выпуклое множество, и его крайние точки (то есть, эргодические меры) — это нормированные орбитальные меры, сосредоточенные на орбитах действия группы  $U(N)$  на  $H(N)$ .

Рассмотрим подробнее эти орбиты. Каждая орбита определяется (неупорядоченным) набором собственных значений  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ . Можно для определенности считать, что  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$ . Пусть  $D_\lambda$  — диагональная матрица

$$D_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

Тогда каждая орбита имеет вид

$$\mathcal{O}(D_\lambda) := \{UD_\lambda U^{-1} : U \in U(N)\}.$$

Например, если все  $\lambda_i$  одинаковы, то  $\mathcal{O}(D_\lambda)$  — это одна точка (то есть, орбита состоит из одной скалярной матрицы). Если же все  $\lambda_i$  различны, то орбита  $\mathcal{O}(D_\lambda)$  изоморфна фактору  $U(N)$  по  $N$ -мерному тору.

**Замечание 8.12.** Можно понимать действие  $U(N)$  на  $H(N)$  как многомерный аналог действия  $S^1 = U(1)$  на  $\mathbb{R}^2$  поворотами.

## 8.4 Орбитальный интеграл

Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$  — фиксированный вектор (этот вектор рассматривается как вектор собственных значений эрмитовой матрицы). Отметим, что скалярное произведение в  $H(N)$ ,

$$(A, B) = \text{Tr}(AB), \quad A, B \in H(N)$$

инвариантно относительно действия группы  $U(N)$ . Определим *орбитальный интеграл*

$$f_\lambda(A) = \int_{U \in U(N)} e^{i \text{Tr}(AUD_\lambda U^{-1})} dU,$$

где интегрирование ведется по (нормированной) мере Хаара на  $U(N)$ .

**Замечание 8.13.** Как уже было сказано, орбитальная мера получается из меры Хаара при факторизации. Таким образом, для функции  $G$  на  $H(N)$  выражение  $\int_{U \in U(N)} G(UD_\lambda U^{-1}) dU$  означает интегрирование  $G$  по орбитальной мере орбиты  $\mathcal{O}(D_\lambda)$ .

Легко заметить, что  $f_\lambda(A)$  — инвариантная функция, поэтому матрицу  $A$  можно считать диагональной,  $A = D_a$ , где  $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ . Будем писать  $f_\lambda(D_a) = f_\lambda(a_1, \dots, a_N)$ .

Утверждение, которое мы докажем, звучит следующим образом.

**Предложение 8.14.**

$$f_\lambda(a_1, \dots, a_N) = \frac{0!1! \dots (N-1)!}{i^{N(N-1)/2}} \cdot \frac{\det [e^{ia_j \lambda_k}]_{j,k=1}^N}{V(\lambda)V(a)}, \quad (8.1)$$

где  $V(\lambda)$  и  $V(a)$  — определители Вандермонда.

**Замечание 8.15.** Если какие-то из  $\lambda_k$  или  $a_j$  совпадают, то значение (8.1) доопределяется по непрерывности.

Орбитальный интеграл можно определить как интеграл Лапласа

$$\int_{U \in U(N)} e^{\text{Tr}(D_a U D_\lambda U^{-1})} dU,$$

относя множитель  $i$  перед следом, например, к матрице  $D_a$ . Вообще говоря, мы будем доказывать, что для всех комплексных  $\lambda \in \mathbb{C}^N$  и  $a \in \mathbb{C}^N$  выполнено

$$\int_{U \in U(N)} e^{\text{Tr}(D_a U D_\lambda U^{-1})} dU = 0!1! \dots (N-1)! \frac{\det [e^{a_j \lambda_k}]_{j,k=1}^N}{V(\lambda)V(a)}. \quad (8.2)$$

Тождество (8.2) следует рассматривать как аналитическое продолжение тождества (8.1).

## 8.5 Доказательство тождества (8.2)

Пусть  $\varphi$  — симметрическая функция и  $A$  — матрица размера  $N \times N$ . Пусть собственные значения  $A$  есть  $a_1, \dots, a_N$ . Положим

$$\varphi(A) := \varphi(a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots).$$

Ясно, что  $e^{\text{Tr} B} = e^{p_1(B)}$ . Пользуясь задачей 8.2, можно записать

$$e^{p_1(B)} = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} p_1^m(B) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{\mu: |\mu|=m} \dim \mu \cdot s_\mu(B).$$

В качестве  $B$  возьмем матрицу  $B = D_a U D_\lambda U^{-1}$  и проинтегрируем вышесказанное выше соотношение по мере Хаара на  $U(N)$ . Положим

$$I := \int_{U \in U(N)} e^{\text{Tr}(D_a U D_\lambda U^{-1})} dU.$$

Имеем

$$I = \sum_{\mu \in \mathbb{Y}, \ell(\mu) \leq N} \frac{\dim \mu}{|\mu|!} \int_{U \in U(N)} s_\mu(D_a U D_\lambda U^{-1}) dU. \quad (8.3)$$

Здесь накладывается условие  $\ell(\mu) \leq N$ , так как иначе функция Шура обнуляется.

Воспользуемся функциональным уравнением для неприводимых нормированных характеров компактной группы. В терминах ненормированных характеров оно может быть записано следующим образом:

$$\int_G \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) dh = \frac{\chi(g_1) \chi(g_2)}{\chi(e)}.$$

Здесь  $\chi(e)$  — размерность представления.

Применим это для подсчета интеграла из (8.3), так как функции Шура — это и есть характеры унитарной группы. При применении функционального уравнения для характеров придется потребовать, чтобы  $|a_i| = |\lambda_i| = 1$ ,  $i = 1, \dots, N$  (чтобы  $D_a, D_\lambda \in U(N)$ ). На самом деле, от этого условия можно отказаться, используя аналитическое продолжение.

Таким образом,

$$I = \sum_{\mu: \ell(\mu) \leq N} \frac{\dim \mu}{\text{Dim}_N \mu} \frac{s_\mu(a) s_\mu(\lambda)}{|\mu|!}.$$

Теперь используем явные формулы для  $\dim \mu$  и  $\text{Dim}_N \mu$  (формулу крюков для  $\dim \mu$  и ее аналог для  $\text{Dim}_N \mu$ , см. лекцию 3):

$$\frac{\dim \mu}{|\mu|!} = \prod_{\square \in \mu} \frac{1}{h(\square)}, \quad \text{Dim}_N \mu = \frac{(N)_\mu}{\prod_{\square \in \mu} h(\square)},$$

где

$$\begin{aligned} (N)_\mu &= \prod_{\square \in \mu} (N + c(\mu)) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} (N - i + 1) \dots (N - i + \mu_i) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{m_i!}{(N - i)!} \\ &= \prod_{i=1}^N \frac{m_i!}{(N - i)!}. \end{aligned}$$

— аналог символа Похгаммера. Здесь  $m_i = \mu_i + N - i$ , а в последнем переходе мы написали произведение до  $N$ , так как лишние множители равны единице.

Значит, наш орбитальный интеграл можно записать как

$$I = 0!1! \dots (N-1)! \sum_{m_1 > \dots > m_N \geq 0} \frac{s_\mu(a) s_\mu(\lambda)}{m_1! \dots m_N!}.$$

Теперь применим явную формулу для функций Шура:

$$I = 0!1! \dots (N-1)! \sum_{m_1 > \dots > m_N \geq 0} \frac{\det [a_j^{m_i}] \det [\lambda_k^{m_i}]}{V(\lambda) V(a) m_1! \dots m_N!}.$$

В этой формуле:

- Выражение  $\det [a_j^{m_i}] \det [\lambda_k^{m_i}]$  симметрично по  $m_1, \dots, m_N$ , так как каждый из определителей кососимметричен.

- Если какие-то два из  $m_i$  совпадают, то соответствующий определитель обнуляется.

Поэтому суммирование по  $m_1 > \dots > m_N \geq 0$  можно заменить на суммирование по всем  $m_1, \dots, m_N \geq 0$ , при этом следует поставить дополнительный множитель  $\frac{1}{N!}$ . Таким образом,

$$I = \frac{0!1! \dots (N-1)!}{V(a)V(\lambda)} \sum_{m_1, \dots, m_N \geq 0} \frac{1}{N!} \frac{\det [a_j^{m_i}] \det [\lambda_k^{m_i}]}{m_1! \dots m_N!}.$$

Здесь уже можно раскрыть определители:

$$I = \frac{0!1! \dots (N-1)!}{V(a)V(\lambda)} \sum_{m_1, \dots, m_N \geq 0} \frac{1}{N!} \times \\ \times \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(N)} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \frac{(a_{\sigma(1)}\lambda_{\tau(1)})^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{(a_{\sigma(N)}\lambda_{\tau(N)})^{m_N}}{m_N!}.$$

Каждое слагаемое в сумме по  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(N)$  зависит только от  $\sigma\tau^{-1}$ . Поэтому можно переписать это следующим образом ( $\frac{1}{N!}$  пропадет):

$$I = \frac{0!1! \dots (N-1)!}{V(a)V(\lambda)} \sum_{m_1, \dots, m_N \geq 0} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{(a_1\lambda_{\tau(1)})^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{(a_N\lambda_{\tau(N)})^{m_N}}{m_N!}.$$

Меняя порядок суммирования, убеждаемся, что тождество (8.2) выполнено:

$$I = \frac{0!1! \dots (N-1)!}{V(a)V(\lambda)} \det [e^{\lambda_j a_k}]_{j,k=1}^N.$$

**Следствие 8.16.** *Дополнительно получено разложение орбитального интеграла по функциям Шура:*

$$\int_{U \in U(N)} e^{\operatorname{Tr}(D_a U D_\lambda U^{-1})} dU = 0!1! \dots (N-1)! \sum_{\mu: \ell(\mu) \leq N} \frac{s_\mu(a)s_\mu(\lambda)}{m_1! \dots m_N!}.$$

## 8.6 Постановка задачи при $N = \infty$

Пространство  $H(N)$  — это конечномерное вещественное евклидово пространство, оно двойственно само себе. При  $N = \infty$  возникает два пространства, двойственных друг другу.

- Обозначим через  $H(\infty)$  индуктивный предел  $H(N)$ , то есть, множество матриц размера  $\infty \times \infty$ , которые являются эрмитовыми и финитными (то есть, в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля).
- Через  $H$  обозначим проективный предел  $H(N)$ . Это множество вообще всех эрмитовых матриц размера  $\infty \times \infty$ .

Пространства  $H(\infty)$  и  $H$  двойственны друг другу,

$$H(\infty) \times H \rightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$$

— это скалярное произведение (легко видеть, что у произведения матрицы из  $H(\infty)$  и матрицы из  $H$  всегда есть конечный след).

Обозначим  $K := U(\infty)$  — индуктивный предел унитарных групп  $U(N)$ . Эта группа состоит из финитных унитарных матриц размера  $\infty \times \infty$ , которые лишь в конечном числе элементов отличаются от единичной матрицы. Группа  $K$  действует на  $H(\infty)$  и на  $H$  сопряжениями (легко видеть, что это имеет смысл).

Наша цель — получить описание множества инвариантных мер —  $\mathfrak{M}(H)^K$ . В этом случае, так как группа не компактна, они уже не будут орбитальными (ср. с поворотом окружности на иррациональный угол). Для меры  $M \in \mathfrak{M}(H)^K$  можно определить орбитальный интеграл

$$f_M(A) = \int_H e^{i \text{Tr}(AB)} M(dB), \quad A \in H(\infty).$$

Существует взаимно-однозначное соответствие между  $\mathfrak{S}^K$  и  $\mathcal{F}(H(\infty))^{U(\infty)}$  — множеством непрерывных инвариантных функций, которые положительно определены и нормированы в нуле. Непрерывность здесь означает непрерывность ограничения на любую конечномерную подгруппу  $U(N)$ .

## 8.7 Упражнения

**Упражнение 8.1.** Пусть группа  $G$  счетна. Покажите, что мера  $M \in \mathfrak{M}(X)^G$  является эргодической (см. определение 8.3), тогда и только тогда, когда нет борелевских подмножеств  $Y \subseteq X$ , которые инвариантны (то есть,  $gX = X$  для всех  $g \in G$ ) и имеют промежуточную меру, отличную от 0 или 1.

Другими словами, в определении эргодических мер относительно действия счетной группы условие mod 0 можно опустить.

**Упражнение 8.2.** Докажите (например, пользуясь явным определением функций Шура через отношение двух детерминантов) тождество

$$p_1^m = \sum_{\mu: |\mu|=n} \dim \mu \cdot s_\mu, \quad m = 1, 2, \dots$$

## 9 Сжатие групп и алгебр Ли

### 9.1 Напоминание

Напомним, что в предыдущей лекции рассматривалась задача описания эргодических мер на  $H(N)$  относительно действия  $U(N)$  (унитарная группа действует сопряжениями). Все эргодические меры являются орбитальными,

и было вычислено их преобразование Фурье, которое дается орбитальным интегралом.

В бесконечномерной ситуации пространство  $H(N)$  следует заменить на пару двойственных пространств —  $H$  и  $H(\infty)$ , где  $H$  — это пространство всех эрмитовых матриц, а  $H(\infty)$  — пространство финитных эрмитовых матриц. При этом существует спаривание между  $H$  и  $H(\infty)$ :  $(A, B) = \text{Tr}(AB)$ ,  $A \in H$ ,  $B \in H(\infty)$ . Отметим, что  $H$  и  $H(\infty)$  наделяются евклидовой топологией.<sup>40</sup>

Нас интересует множество мер  $\mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$  на  $H$ , инвариантных относительно действия  $U(\infty)$  (напомним, что  $U(\infty)$  — это группа финитных унитарных матриц, которые лишь в конечном числе мест отличаются от единичной). Крайние точки  $\mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$  — это и есть эргодические меры. В бесконечномерном случае эргодические меры уже не будут орбитальными.

Преобразование Фурье дает взаимно-однозначное соответствие (по теореме Бохнера) между множеством мер  $\mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$  и множеством некоторых функций на двойственном пространстве. Другими словами, пусть  $\mathcal{F}(H(\infty))^{U(\infty)}$  — множество функций на  $H(\infty)$ , которые являются

- непрерывными,
- положительно определенными (определение 8.9),
- нормированными:  $f(0) = 1$ .

Тогда теорема Бохнера (теорема 8.8) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между  $\mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$  и  $\mathcal{F}(H(\infty))^{U(\infty)}$ . Это соответствие осуществляется с помощью преобразования Фурье. Крайние точки выпуклого множества  $\mathcal{F}(H(\infty))^{U(\infty)}$  будем иногда называть неразложимыми функциями. Они отвечают эргодическим мерам.

Для конечных  $N$  было получено явное описание крайних точек множества инвариантных мер  $\mathfrak{M}(H(N))^{U(N)}$  в терминах неразложимых функций  $f \in \mathcal{F}(H(N))^{U(N)}$ . Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ , и рассмотрим преобразование Фурье орбитальной меры на  $H(N)$  (то есть, эргодической меры):

$$f_\lambda(a_1, \dots, a_N) = \int_{U(N)} \exp(i \text{Tr}(AUBU^{-1})) dU.$$

Здесь  $A \in H(N)$ ,  $a_i$  — собственные значения  $A$ , а  $B \in H(N)$  имеет собственные значения  $\lambda_i$ . Данный интеграл был вычислен в предыдущей лекции, и он равен

$$f_\lambda(a) = \frac{0! \dots (N-1)!}{i^{N(N-1)/2}} \cdot \frac{\det [e^{i\lambda_k a_j}]_{k,j=1}^N}{V(\lambda)V(a)}, \quad (9.1)$$

где  $V(\cdot)$  — определитель Вандермонда.

<sup>40</sup>По сути,  $H$  можно отождествить с  $\mathbb{R}^\infty$ .

## 9.2 Пределный переход от функций Шура

Отметим сходство функций  $f_\lambda$  (9.1) с функциями Шура, которые являются характерами группы  $U(N)$ . Пусть  $\tilde{\lambda} \in \text{Sign}(N)$  — сигнатура длины  $N$ , и рассмотрим нормированный характер  $\chi_{\tilde{\lambda}}$  группы  $U(N)$ . Будем рассматривать  $\chi_{\tilde{\lambda}}$  как функцию на торе, тогда<sup>41</sup>

$$\begin{aligned} \chi_{\tilde{\lambda}}(u_1, \dots, u_N) &= \frac{s_{\tilde{\lambda}}(u_1, \dots, u_N)}{s_{\tilde{\lambda}}(1, \dots, 1)} = \frac{s_{\tilde{\lambda}}(u_1, \dots, u_N)}{\text{Dim}_N \tilde{\lambda}} = \\ &= \frac{0!1! \dots (N-1)!}{\prod_{1 \leq k < l \leq N} (\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_l + l - k)} \cdot \frac{\det[u_j^{\tilde{\lambda}_k + N - k}]_{j,k=1}^N}{V(u)}. \end{aligned}$$

Здесь  $\text{Dim}_N \tilde{\lambda}$ , как обычно, размерность неприводимого представления, отвечающего сигнатуре  $\tilde{\lambda}$ . Покажем, как функция  $f_\lambda$  (9.1) получается путем предельного перехода из функций Шура.

**Предложение 9.1.** *Фиксируем  $a, \lambda \in \mathbb{R}^N$ , положим*

$$\tilde{\lambda} = \lambda(\varepsilon) := [\varepsilon^{-1} \lambda], \quad u_j = u_j(\varepsilon) := e^{i\varepsilon a_j}.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_{\lambda(\varepsilon)}(u(\varepsilon)) = f_\lambda(a).$$

*Доказательство.* Для простоты предположим, что все  $a_j$ , а также все  $\lambda_k$  различны. Ясно, что

$$u_j^{\tilde{\lambda}_k + N - k} = \exp(\varepsilon i a_j \cdot \varepsilon^{-1} \lambda_k + \dots) \rightarrow e^{i \lambda_k a_j},$$

и

$$\prod_{1 \leq k < l \leq N} (\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_l + l - k) \sim \varepsilon^{-N(N-1)/2} V(\lambda).$$

Так как

$$u_j(\varepsilon) - u_k(\varepsilon) \sim i\varepsilon(a_j - a_k),$$

то

$$V(u(\varepsilon)) \varepsilon^{-N(N-1)/2} \rightarrow i^{N(N-1)/2} V(a),$$

что и доказывает предложение.  $\square$

## 9.3 Симметрические пары и $\mathbb{Z}_2$ -градуированные алгебры Ли

Предложение 9.1 связано с идеей сжатия групп и алгебр Ли. Опишем эту идею. Сначала дадим необходимые определения, касающиеся групп и алгебр Ли.

<sup>41</sup>Здесь  $s_{\tilde{\lambda}}$  — лорановский многочлен Шура, см., например, [Оль09, Лекция 1].

Пусть  $G$  — группа Ли, и  $\theta \in \text{Aut}(G)$ ,  $\theta^2 = \text{Id}$  — инволютивный автоморфизм  $G$ . Пусть  $K \subset G$  — множество неподвижных точек относительно  $\theta$ . Будем также обозначать  $K$  через  $G^\theta$ . Ясно, что это подгруппа.

**Пример 9.2.** Если  $G = U(N)$  и  $\theta: g \mapsto \bar{g}$  — обычное комплексное сопряжение, то  $K = O(N)$ .

**Пример 9.3.** С нашей ситуацией связан следующий пример. Пусть  $G = U(N) \times U(N)$ , и

$$\theta: (g_1, g_2) \mapsto (g_2, g_1).$$

Тогда  $K \subset G$  — диагональная подгруппа, обозначаемая  $K = \text{diag } U(N)$ .

Будем давать некоторые замечания для тех, кто знаком с понятием симметрического пространства.<sup>42</sup>

**Замечание 9.4.** Если группа  $G$  компактна, то  $G/K = G/G^\theta$  — компактное симметрическое пространство.

Пусть  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  — алгебра Ли группы  $G$ . Дифференциал отображения  $\theta$  в единице группы  $G$  будем также обозначать через  $\theta$ . Это инволютивный автоморфизм алгебры  $\mathfrak{g}$ . Возникает разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1,$$

где (в силу инволютивности  $\theta$ )

$$\mathfrak{g}_0 := \{X \in \mathfrak{g}: \theta(X) = X\},$$

$$\mathfrak{g}_1 := \{X \in \mathfrak{g}: \theta(X) = -X\}.$$

Элементы  $\mathfrak{g}_0$  можно называть четными, а элементы  $\mathfrak{g}_1$  — нечетными. В примере 9.3 имеем  $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(N) \oplus \mathfrak{u}(N)$ , и  $\mathfrak{g}_0$  состоит из матриц вида  $A \oplus A$ , а  $\mathfrak{g}_1$  — из матриц вида  $B \oplus (-B)$ .

**Замечание 9.5.** На самом деле, можно сказать, что  $\mathfrak{g}_1 = T_*(G/K)$  — касательное пространство к однородному пространству  $G/K$  в любой точке.  $G/K$  — симметрическое пространство, в любой точке возникает инволютивное отображение, которое локально является симметрией.

Пару  $(\mathfrak{g}, \theta)$  также называют симметрической парой, и симметрические пары — это то же самое, что  $\mathbb{Z}_2$ -градуированные алгебры Ли, то есть, алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ , где  $\mathfrak{g}_0$  — подалгебра, то есть,

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq \mathfrak{g}_0, \tag{9.2}$$

а  $\mathfrak{g}_1$  — это  $\mathfrak{g}_0$ -модуль, то есть,

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_0] \subseteq \mathfrak{g}_1, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{g}_0. \tag{9.3}$$

В  $\mathbb{Z}_2$ -градуированной алгебре Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  автоморфизм  $\theta$  определяется как умножение на  $(-1)$  в  $\mathfrak{g}_1$ .

<sup>42</sup>Один из простейших примеров симметрических пространств — сфера.

## 9.4 Сжатие групп и алгебр Ли

С  $\mathbb{Z}_2$ -градуированными алгебрами Ли можно проводить процедуру сжатия, которая приводит (в пределе) к новым объектам. Пусть  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  —  $\mathbb{Z}_2$ -градуированная алгебра Ли. Обозначим через  $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$  полупрямую сумму:

$$\overset{\circ}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] := \{0\}.$$

Другими словами, мы насильно обнулили коммутаторы элементов  $\mathfrak{g}_1$  друг с другом, а все остальные коммутаторы оставили теми же. При этом  $\mathfrak{g}_1$  является  $\mathfrak{g}_0$ -модулем. Будем обозначать данную ситуацию через

$$\overset{\circ}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_1.$$

Введем группу Ли  $\overset{\circ}{G} = K \ltimes \mathfrak{p}$ , где  $K$  — подгруппа в  $G$  (ситуация здесь та же, что в предыдущем подразделе, то есть,  $K = G^\theta$ ), и  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1$  — алгебра Ли, которая рассматривается как аддитивная группа. Разложение  $\overset{\circ}{G} = K \ltimes \mathfrak{p}$  называется разложением Картана и описывает локально структуру группы  $G$ , о чем будет сказано ниже.

Будем обозначать элементы  $\overset{\circ}{g} \in \overset{\circ}{G}$  через  $\overset{\circ}{g} = (v, U)$ , где  $v \in \mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1$  и  $U \in K$ . Произведение двух таких элементов вычисляется следующим образом:

$$(v_1, U_1) \cdot (v_2, U_2) = (v_1 + \text{Ad } U_1 \cdot v_2, U_1 U_2).$$

Это можно объяснить следующим образом:  $U \cdot v = UvU^{-1} \cdot U = \text{Ad } U \cdot v \cdot U$ .

Возникновение группы  $\overset{\circ}{G}$  можно объяснить с помощью сжатия группы  $G$ . Более подробно это будет объяснено ниже, а сейчас рассмотрим, что происходит в ситуации примера 9.3.

**Пример 9.6.** В нашей ситуации (пример 9.3) действия группы  $U(N)$  на  $H(N)$  сопряжениями удобно считать, что  $\mathfrak{g}_0$  состоит из антиэрмитовых матриц, а  $\mathfrak{g}_1$  — из эрмитовых матриц. Локально  $G = U(N) \times U(N)$  можно представить как

$$U(N) \times U(N) = \left\{ (e^{iA/2}, e^{-iA/2}) \right\} \cdot \text{diag } U(N),$$

где  $\text{diag } U(N) = K = G^\theta$  и можно считать, что группа матриц  $\{(e^{iA/2}, e^{-iA/2})\}$  есть  $\exp \mathfrak{g}_1$ .

Таким образом, локально  $G = \exp \mathfrak{p} \cdot K$ . В пределе, когда «кривой» случай вырождается в «плоский», группа  $G$  вырождается в  $\overset{\circ}{G} = K \ltimes \mathfrak{p}$ , а соответствующая алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  — в  $\overset{\circ}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_1$ .

Опишем процедуру сжатия алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  более детально. Пусть  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ . Пусть  $\{X_i\}$  — базис  $\mathfrak{g}_0$ , а  $\{Y_\alpha\}$  — базис  $\mathfrak{g}_1$ . Рассмотрим структурные

константы

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= \sum_k A_{ij}^k X_k, \\ [X_i, Y_\alpha] &= \sum_\beta B_{i\alpha}^\beta Y_\beta, \\ [Y_\alpha, Y_\beta] &= \sum_i C_{\alpha\beta}^i X_i \end{aligned}$$

(ср. с (9.2)–(9.3)). Теперь рассмотрим деформацию с параметром  $\varepsilon$ , при которой  $\mathfrak{g}_1$  «сжимается»:

$$\tilde{Y}_\alpha = \varepsilon Y_\alpha.$$

Для всех  $\varepsilon > 0$  деформированная алгебра изоморфна исходной. Структурные константы  $A_{ij}^k$  и  $B_{i\alpha}^\beta$  в деформированной алгебре не изменятся, а  $C_{\alpha\beta}^i$  умножатся на  $\varepsilon$ :

$$\tilde{C}_{\alpha\beta}^i = \varepsilon C_{\alpha\beta}^i.$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  константы  $\tilde{C}_{\alpha\beta}^i$  стремятся к нулю, и деформация в пределе приводит к новому объекту, а именно, к полупрямой сумме  $\mathring{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}_1$ .

**Пример 9.7.** Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий идею сжатия. Рассмотрим группу  $SO(3)$ , которая действует на сфере  $S^2$ . Локально каждый поворот — элемент  $SO(3)$  — можно представить как композицию поворота вокруг некоторой оси (это элемент  $SO(2)$ ) и малого параллельного переноса в касательной плоскости к  $S^2$  в точке, которая лежит на оси поворота. Таким образом, локально  $SO(3) = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ . При этом  $SO(2)$  действует на  $\mathbb{R}^2$  поворотами.

## 9.5 Сжатие и орбитальные меры

На самом деле, при сжатии неприводимые нормированные характеры (или, иначе, сферические представления [Оль09, Лекция 11]) в пределе дают другой объект, который близок к эргодическим мерам. Опишем представленный смысл орбитальных мер в конечномерном случае.

Напомним, что у нас группа  $K = U(N)$  действует на  $H(N)$  сопряжениями. Пространство  $H(N) = \mathfrak{p}$  будем мыслить как вещественное евклидово пространство с ортогональным действием группы  $K$  (то есть, таким действием, которое сохраняет скалярное произведение в  $\mathfrak{p}$ ). С другой стороны, можно брать сопряженное пространство  $\mathfrak{p}^*$  и спаривание  $\mathfrak{p}$  с  $\mathfrak{p}^*$  вместо скалярного произведения в  $\mathfrak{p}$ . В конечномерном случае эти два подхода эквивалентны. Мы будем рассматривать  $\mathfrak{p}$  и  $\mathfrak{p}^*$ , так как это будет удобнее интерпретировать в бесконечномерном случае.

Рассмотрим группу  $\mathring{G} = K \ltimes \mathfrak{p}$ . Нас интересуют инвариантные вероятностные меры  $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}^*)^K$ , и, главным образом, эргодические вероятностные меры, то есть, крайние точки  $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}^*)^K$ . С точки зрения теории представлений нас интересуют циклические сферические унитарные представления группы  $\mathring{G}$ . Дадим четкое определение, данного понятия.

**Определение 9.8.** Пусть  $\mathcal{H}$  — комплексное гильбертово пространство. Пусть  $T: \mathring{G} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  — унитарное представление (здесь  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  обозначает унитарную группу пространства  $\mathcal{H}$ ). Пусть  $\xi$  — сферический вектор с  $\|\xi\| = 1$ , то есть, такой вектор, который инвариантен относительно действия подгруппы  $K \subset \mathring{G}$ .<sup>43</sup> Пусть вектор  $\xi$  является циклическим, то есть, замыкание линейной оболочки векторов вида  $T(\mathring{g})\xi$ , где  $\mathring{g} \in \mathring{G}$ , совпадает с  $\mathcal{H}$ . Говорим, что  $(T, \xi)$  — циклическое сферическое унитарное представление группы  $\mathring{G}$ .

**Предложение 9.9.** Существует взаимно-однозначное соответствие между циклическими сферическими унитарными представлениями  $(T, \xi)$  группы  $\mathring{G}$  и инвариантными мерами  $M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p}^*)^K$ . При этом неприводимым представлениям соответствуют эргодические меры.<sup>44</sup>

*Доказательство.* Второе утверждение об эргодических мерах очевидно, займемся доказательством первого утверждения.

1. Покажем, как по инвариантной мере строится соответствующее представление. Пусть  $M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p}^*)^K$  и пусть  $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{p}^*, M)$ . Для  $U \in K$ ,  $\varphi \in \mathcal{H}$  и  $B \in \mathfrak{p}^*$  представление определим как

$$(T(U)\varphi)(B) = \varphi(U^{-1}B).$$

Для  $A \in \mathfrak{p}$  определим

$$(T(A)\varphi)(B) = e^{i(A,B)}\varphi(B),$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — спаривание между  $\mathfrak{p}$  и  $\mathfrak{p}^*$ . То, что это представление, следует из того, что

$$T(U)T(A)T(U)^{-1} = T(U \cdot A).$$

В качестве сферического вектора  $\xi$  возьмем единичную функцию из  $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{p}^*, M)$ . Так как функции вида  $\{e^{i(A,\cdot)}\}$  плотны в  $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{p}^*, M)$ , то вектор  $\xi$  является циклическим. Таким образом,  $(T, \xi)$  — искомое представление.

Рассмотрим сферическую функцию представления  $(T, \xi)$ :

$$\psi(\mathring{g}) = (T(\mathring{g})\xi, \xi), \quad \mathring{g} \in \mathring{G}.$$

Легко видеть, что функция  $\psi$  является биинвариантной относительно  $K$ . Поэтому можно считать, что на самом деле  $\mathring{g} \in \mathfrak{p}^*$ . Рассмотрим также преобразование Фурье меры  $M$ :

$$f_M(A) = \int_{\mathfrak{p}^*} e^{i(A,B)} M(dB).$$

Легко понять, что  $f_M(A) = \psi(A)$ ,  $A \in \mathfrak{p}^*$ .

<sup>43</sup>Это обозначается  $\xi \in \mathcal{H}^K$ .

<sup>44</sup>В нашем конечномерном случае эргодические меры — то же самое, что орбитальные.

2. Теперь по представлению  $(T, \xi)$  построим меру  $M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p}^*)^K$ .

У представления  $(T, \xi)$  рассмотрим сферическую функцию  $\psi(\mathring{g})$ , как выше. Это бинвариантная положительно определенная функция на  $\mathring{G}$ . Легко видеть, что существует взаимно-однозначное соответствие

$${}^K\mathcal{F}(\mathring{G})^K \leftrightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{p})^K, \quad (9.4)$$

где

- ${}^K\mathcal{F}(\mathring{G})^K$  — положительно определенные нормированные непрерывные функции на  $\mathring{G}$ , которые являются бинвариантными относительно  $K$ ,
- $\mathcal{F}(\mathfrak{p})^K$  — положительно определенные нормированные непрерывные функции на  $\mathfrak{p}$ , инвариантные относительно  $K$ .

Чтобы убедиться в биекции (9.4), необходимо лишь проверить положительную определенность. Пусть  $f \in {}^K\mathcal{F}(\mathring{G})^K$ , и для любых  $\mathring{g}_i \in \mathring{G}$  в конечном числе матрица  $[f(\mathring{g}_i^{-1} \mathring{g}_j)]$  положительно определена. Пусть  $\mathring{g} = (A, U)$ . Будем обозначать такие элементы через  $A \circ U$ , где  $\circ$  — произведение в  $\mathring{G}$ . Пусть  $\mathring{g}_i = A_i \circ U_i$ , и ясно, что  $\mathring{g}_i^{-1} = U_i^{-1} \circ (-A_i)$ . Тогда матрица  $[f(\mathring{g}_i^{-1} \mathring{g}_j)]$  имеет вид

$$[f(u_i^{-1} \circ (-A_i) \circ A_j \circ U_j)],$$

но так как  $f \in {}^K\mathcal{F}(\mathring{G})^K$ , то  $U_i^{-1}$  и  $U_j$  можно выбросить. Поэтому положительная определенность матрицы  $[f(\mathring{g}_i^{-1} \mathring{g}_j)]$  эквивалентна положительной определенности матрицы  $[f(A_j - A_i)]$ , то есть, биекция (9.4) установлена.

По теореме Бохнера, каждая  $f \in \mathcal{F}(\mathfrak{p})^K$  однозначно определяет вероятностную меру на  $\mathfrak{p}^*$ , которая является инвариантной относительно  $K$ . Это и будет мера  $M$ , построенная по представлению  $(T, \xi)$ .  $\square$

## 9.6 Сжатие и эргодические меры

В нашем примере 9.3  $G = U(N) \times U(N)$ ,  $K = \text{diag } U(N) \subset G$ . В результате сжатия приходим к группе  $\mathring{G} = K \ltimes H(N)$ , где группа  $K = U(N)$  действует на  $H(N)$  сопряжениями. Неприводимые нормированные характеры  $U(N)$  — это то же самое, что сферические экстремальные функции пары  $(G, K)$  [Оль09, Лекция 11]. При сжатии они переходят в характеристические функции мер  $M \in \mathfrak{M}^K$ , или, как показывает предложение 9.9, в экстремальные сферические функции пары  $(\mathring{G}, K)$ . Это можно изобразить следующим образом:

$$\text{Ex}(\mathcal{F}(G)^K) \xrightarrow{\text{сжатие}} \text{Ex}({}^K\mathcal{F}(\mathring{G})^K) = \text{Ex}(\mathcal{F}(H(N))^{U(N)}).$$

Последний объект  $\text{Ex}(\mathcal{F}(H(N))^{U(N)})$  — это множество всех орбитальных (=эргодических) мер на  $H(N)$ . Наша конечная цель — описание эргодических мер в случае  $N = \infty$ , в котором эргодические меры уже не являются

орбитальными. В этом случае как раз помогает интерпретация на языке теории представлений.

Идея сжатия помогает понять, какого ответа следует ожидать в задаче описания  $\text{Ex}(\mathcal{F}(H)^{U(\infty)})$ , то есть, всех эргодических мер на множестве всех эрмитовых матриц  $H$ . Напомним, что в «кривой» ситуации, до сжатия, ответ нам уже известен (см. [Оль09]).

Итак, пусть  $\mathfrak{p}^* = H$ , тогда  $\mathfrak{p} = H(\infty)$  — множество финитных эрмитовых матриц. Предложение 9.9 остается в силе, так как теорема Бохнера в этом случае также работает. Таким образом, существует биекция

$$\mathfrak{M}(H)^{U(\infty)} \leftrightarrow \{(T, \xi)\},$$

где справа стоят циклические сферические унитарные представления  $\overset{\circ}{G} = U(\infty) \times H(\infty)$ . Отметим, что преобразование Фурье осуществляет биекцию

$$\mathcal{F}(H(\infty)) \leftrightarrow \mathfrak{M}(H).$$

Эргодические меры на  $H$  уже не будут орбитальными, но до их описания можно догадаться, если отождествить их с неприводимыми сферическими представлениями  $\overset{\circ}{G}$  и использовать идею сжатия сферических представлений пары  $(G, K)$ . Последние представления были рассмотрены в первой части лекций [Оль09], они отвечают неразложимым нормированным характеристам группы  $U(\infty)$  и задаются функциями Войкулеску. Пусть  $w = (\alpha^+, \beta^+, \delta^+, \alpha^-, \beta^-, \delta^-)$  — параметры Войкулеску, тогда соответствующий экстремальный характер  $U(\infty)$  записывается как

$$\chi_w(\text{diag}(u_1, u_2, \dots)) = \prod_{j=1}^{\infty} \Phi_w(u_j),$$

где  $\Phi_w$  — функция Войкулеску

$$\Psi_w(u) = e^{\gamma^+(u-1) + \gamma^-(u^{-1}-1)} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^+(u-1)}{1 - \alpha_i^+(u-1)} \cdot \frac{1 + \beta_i^-(u^{-1}-1)}{1 - \alpha_i^-(u^{-1}-1)}, \quad |u| = 1. \quad (9.5)$$

Здесь  $\Phi_w(1) = 1$  и  $\gamma^{\pm} = \delta^{\pm} - \sum_j (\alpha_j^{\pm} + \beta_j^{\pm}) \geq 0$ .

Сжатие в терминах этих параметров выглядит как замена (см. также предложение 9.1<sup>45</sup>):

$$\alpha_j^{\pm} \rightarrow \varepsilon^{-1} \alpha_j^{\pm}, \quad u_k \rightarrow e^{i\varepsilon a_k}.$$

Оказывается, что параметры  $\beta_j^{\pm}$  при сжатии не выживают. Таким образом, следует ожидать, что при сжатии из (9.5) получатся выражения вида

$$\prod \frac{1}{1 - ix_j^+ a} \prod \frac{1}{1 + ix_j^- a}, \quad (9.6)$$

где  $u \sim e^{i\varepsilon a}$  и  $\alpha_j^{\pm} \sim \varepsilon^{-1} x_j^{\pm}$ . О том, как преобразуются параметры  $\gamma^{\pm}$ , будет сказано позже, когда мы получим строгий результат.

<sup>45</sup>Напомним, что параметры  $\alpha_j^{\pm}$  возникают как пределы нормированных длин строк сигнатур, которые в предложении 9.1 обозначаются через  $\tilde{\lambda}$ , см. [Оль09].

## 9.7 Связь с тотальной положительностью

Используя идею сжатия, мы сформулировали гипотезу, которая состоит в следующем. Если  $M \in \text{Ex}(\mathfrak{M}(H)^\infty)$  — эргодическая мера, то ее характеристическая функция (а это функция на  $H(\infty)$ ) имеет мультипликативный вид

$$f(a_1, a_2, \dots) = \prod_{j=1}^{\infty} F(a_j),$$

где  $F(\cdot)$  — функция на  $\mathbb{R}$ .<sup>46</sup> Идея о том, как может выглядеть функция  $F$ , дается формулой (9.6). Произведение здесь фактически конечно, так как  $a_1, a_2, \dots$  — собственные значения матрицы из  $H(\infty)$ , и лишь конечное их число отлично от нуля, и при этом  $F(0) = 1$ .

На самом деле, все функции вида (9.6) являются характеристическими функциями эргодических мер, но существуют и другие, вид которых более общий, чем (9.6). Таким образом, получаем семейство эргодических мер, которые зависят от бесконечного числа параметров.

Шёнберг в 1953 году классифицировал тотально положительные меры на прямой  $\mathbb{R}$  в терминах их характеристических функций. Его ответ совпадает с ответом в нашей задаче классификации мер  $M \in \mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$ . О тотальной положительности см. в первой части лекций, [Оль09, Лекции 6 и 7].

## 9.8 Мультипликативность характеристической функции эргодической меры

С помощью функционального уравнения для характеров покажем, что характеристическая функция  $f_M(a_1, a_2, \dots)$  эргодической меры  $M \in \mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$  является мультипликативной, то есть, представляется в виде  $\prod_{j=1}^{\infty} F(a_j)$ . В доказательстве мы не будем использовать (еще не полученный) явный вид функции  $F$ .

Пусть  $\chi$  — неприводимый характер,  $\tilde{\chi}(\cdot) = \frac{\chi(\cdot)}{\chi(e)}$  — нормированный характер. Тогда

$$\int_{h \in K} \tilde{\chi}(g_1 h g_2 h^{-1}) dh = \tilde{\chi}(g_1) \tilde{\chi}(g_2). \quad (9.7)$$

Это общий факт о характерах полупрямых произведений вида  $\overset{\circ}{G} = K \ltimes \mathfrak{p}$ , где  $K$  — компактная группа (и интегрирование ведется по мере Хаара на  $K$ ), а  $\mathfrak{p}$  — векторное пространство.

Для  $f \in \text{Ex}(\mathcal{F}(\mathfrak{p})^K)$  (то есть, для характеристической функции эргодической меры) также выполняется функциональное уравнение, которое следует из (9.7):

$$\int_{U \in K} f(A_1 + U \circ A_2) dU = f(A_1) f(A_2). \quad (9.8)$$

<sup>46</sup>Удобно мыслить, что  $\mathbb{R}$  здесь — это касательное пространство к окружности, на которой задана функция  $\Phi_w$  (9.5).

Здесь  $U \circ A = UAU^{-1}$  — произведение в группе  $\mathring{G}$ . Из этого уравнения для  $f$  получается требуемая мультипликативность точно так же, как в [Оль09, Лекция 7].

Если  $K$  — компактная группа, а пространство  $\mathfrak{p}$  конечномерно, то  $f$  — преобразование Фурье орбитальной меры, и уравнение (9.8) можно получить очень просто. А именно, пусть  $B \in \mathfrak{p}^*$  — метка орбиты, которая проходит через  $B$ , тогда для  $A \in \mathfrak{p}$  имеем

$$f(A) = f_B(A) = \int_{U \in K} e^{i(A, U \circ B)} dU.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{U} \in K} f(A_1 + \tilde{U} \circ A_2) d\tilde{U} &= \int_{\tilde{U}} \int_U e^{i(A_1 + \tilde{U} \circ A_2, U \circ B)} d\tilde{U} dU \\ &= \int_{\tilde{U}} \int_U e^{i(A_1, U \circ B)} e^{i(A_2, \tilde{U}^{-1} U \circ B)} d\tilde{U} dU. \end{aligned}$$

Этот интеграл распадается на два интеграла — по  $U$  и по  $\tilde{U}^{-1}U$ . Ясно, что второй интеграл также ведется по мере Хаара на  $K$ . В результате интегрирования получаем  $f(A_1)f(A_2)$ , что и требовалось.

## 10 Тотальная положительность функций на прямой и эргодические меры

### 10.1 Напоминание: тотальная положительность и характеры $U(\infty)$

Напомним задачу о характерах бесконечномерной унитарной группы  $U(\infty)$  и ее связь с тотальной положительностью. Более подробно см. [Оль09, Лекции 6 и 7]. Характеры  $\chi$  группы  $U(\infty)$  задаются на торе  $\mathbb{T}(\infty)$ , который состоит из элементов вида  $(u_1, u_2, \dots)$ , где  $u_i \in \mathbb{C}, |u_i| = 1$  и лишь конечное число  $u_i$  отлично от единицы. Экстремальные нормированные характеры имеют мультипликативный вид  $\chi(u_1, u_2, \dots) = \Phi(u_1)\Phi(u_2)\dots$ , где функция  $\Phi$  на  $\mathbb{T}^1$  имеет вид (9.5). Функции  $\Phi$  нормированы,  $\Phi(1) = 1$ .

Перейдем к двойственной картине. Пусть  $\Phi = \widehat{M}$ , где  $M = \{M(n)\}$  — вероятностная мера на  $\mathbb{Z}$ . Возникает вопрос, что можно сказать про меру  $M$ ? Воспользуемся ограничением характера  $\chi$  группы  $U(\infty)$  на конечномерную подгруппу  $U(N) \subset U(\infty)$  (здесь  $N$  — любое натуральное число). Тогда функция на  $U(N)$ ,

$$U(N) \ni U \mapsto \Phi(u_1) \dots \Phi(u_N),$$

где  $u_1, \dots, u_N$  — собственные значения матрицы  $U$ , является непрерывной, нормированной (так как  $\Phi(1) = 1$ ) и положительно определенной, так как ограничение  $\chi$  на  $U(N)$  является положительно определенной функцией.

В терминах меры  $M$  это означает,<sup>47</sup> что мера  $M$  тотально положительна, то есть, по определению, все миноры всех порядков матрицы

$$[K(x, y)]_{x, y \in \mathbb{Z}} = [M(x - y)]_{x, y \in \mathbb{Z}}$$

неотрицательны. Будем обозначать этот факт через  $M \in TP$ .

## 10.2 Тотальная положительность и сжатие. Формулировка основного утверждения

При сжатии, описанном в предыдущей лекции, группа  $U(\infty)$  заменяется на пространство финитных эрмитовых матриц  $H(\infty)$ . Параметры Войкулеску  $\alpha_j^\pm$  (см. (9.5)) стремятся к бесконечности, а собственные значения  $u_j$ , наоборот, приближаются к единице. В результате этого предельного перехода из  $\Phi(\cdot)$  (9.5) получаются функции, связанные с мерами на множестве всех эрмитовых матриц  $H$ , которые эргодичны относительно действия группы  $U(\infty)$  на  $H$  сопряжениями.

Более подробно, получается непрерывная функция  $F(a)$  на  $\mathbb{R}$  (это касательное пространство к тору  $\mathbb{T}^1$ ), такая, что для всех  $N = 1, 2, \dots$  функция на  $H(N)$

$$H(N) \ni A \mapsto F(a_1) \dots F(a_N), \quad (10.1)$$

где  $a_1, \dots, a_N$  — собственные значения матрицы  $A$ , является непрерывной, нормированной ( $F(0) = 1$ ) и положительно определенной.

**Определение 10.1.** Будем говорить, что функция  $F$  на  $\mathbb{R}$  удовлетворяет условию (\*), если для всех  $N$  функция (10.1) на  $H(N)$  является унитарно инвариантной, непрерывной, нормированной и положительно определенной.

**Замечание 10.2.** На самом деле, условие (\*) для  $F$  означает, что функция на  $H(\infty)$ ,

$$H(\infty) \ni A \mapsto F(a_1)F(a_2) \dots,$$

где  $a_i$  — собственные значения матрицы  $A$ , является характеристической функцией эргодической меры на  $H$ . В следующей лекции мы займемся полным описанием таких функций. Сейчас рассмотрим связь этих функций с тотальной положительностью.

Пусть  $F$  — преобразование Фурье на  $\mathbb{R}$  от некоторой вероятностной меры  $M$  на  $\mathbb{R}$ . Основное утверждение, которое будет доказано в этой лекции, состоит в следующем:

$F$  удовлетворяет условию (\*) тогда и только тогда, когда мера  $M$  является тотально положительной мерой на  $\mathbb{R}$ .

<sup>47</sup>На самом деле, для меры  $M$  достаточно ограничивать  $\chi$  на  $U(1) \subset U(\infty)$ .

Условие тотальной положительности меры  $M$  на  $\mathbb{R}$  можно сформулировать следующим образом. Пусть  $\varphi$  для простоты есть плотность  $\varphi$  (относительно меры Лебега), то есть,

$$\varphi \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = F(0) = 1$$

и  $dM(b) = \varphi(b)db$ .

По определению, мера  $M$  с плотностью  $\varphi$  тотально положительна тогда и только тогда, когда для любого набора  $x_1 > \dots > x_N$  и  $y_1 > \dots > y_N$  ( $x_i, y_j \in \mathbb{R}$ ) выполнено

$$\det [K(x_i, y_j)]_{i,j=1}^N \geq 0,$$

где  $K(x, y) = \varphi(x - y)$ . Стационарное ядро  $K(x, y)$  на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  представляет собой непрерывный аналог теплицевой матрицы.

Напомним, что положительно определенные функции на  $U(N)$  — это те, которые раскладываются по неприводимым характерам с неотрицательными коэффициентами. Для функции  $\Phi(\cdot)$  на  $\mathbb{T}$  (преобразовании Фурье тотально положительной меры  $M$  на  $\mathbb{Z}$ ) это означает, что для всех  $N = 1, 2, \dots$  разложение  $\Phi(u_1) \dots \Phi(u_N)$  по функциям Шура  $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)$  (это и есть неприводимые характеры) происходит с неотрицательными коэффициентами. Для этих коэффициентов существует явная формула:

$$\Phi(u_1) \dots \Phi(u_N) = \sum \det [M(\lambda_i - i + j)] s_\lambda(u_1, \dots, u_N). \quad (10.2)$$

Положительная определенность функции  $\Phi(u_1) \dots \Phi(u_N)$  гарантирует неотрицательность миноров  $\det [M(\lambda_i - i + j)]$ . Это не все миноры, но с помощью дополнительных соображений можно добиться неотрицательности всех миноров. Таким образом, функция  $\Phi$  становится преобразованием Фурье тотально положительной вероятностной меры на  $\mathbb{Z}$ .

Теперь применим к (10.2) идею сжатия. Следует раскладывать не по функциям Шура, а по нормированным функциям Шура, то есть, по функциям вида  $\frac{s_\lambda(u_1, \dots, u_N)}{\text{Dim}_N \lambda}$ . Данные величины при сжатии имеют предел, а функция  $F$  (на  $\mathbb{R}$ ) получается предельным переходом из  $\Phi$ . Поэтому для произведения вида  $F(a_1) \dots F(a_N)$  возможно написать разложение типа (10.2) и получить какие-то условия на меру  $M$  на  $\mathbb{R}$ . Здесь считаем, что  $F$  — преобразование Фурье меры  $M$  на  $\mathbb{R}$ . Разложение для  $F(a_1) \dots F(a_N)$  — это на самом деле разложение по орбитам, так как неприводимые характеры при сжатии переходят в эргодические меры, а в конечномерном случае эргодические меры являются орбитальными.

### 10.3 Условие (\*) и тотальная положительность

Как и в случае с мерами на  $\mathbb{Z}$ , из условия положительной определенности  $F(a_1) \dots F(a_N)$  для всех  $N$  сначала извлекается не условие тотальной

положительности меры  $M$  на  $\mathbb{R}$ ,<sup>48</sup> а некоторое эквивалентное ему условие. Это было сделано в работе [Pic91]. В данном подразделе приведем формулировку и доказательство этого результата.

**Теорема 10.3.** Пусть  $F$  — преобразование Фурье вероятностной меры  $M$  на  $\mathbb{R}$ , пусть мера  $M$  имеет плотность  $\varphi$  относительно меры Лебега и пусть  $\varphi$  — бесконечно гладкая функция.<sup>49</sup>

Функция  $F$  удовлетворяет условию (\*) тогда и только тогда, когда для всех  $x_1 > \dots > x_N$  ( $x_i \in \mathbb{R}$ ) выполнено

$$\det[\varphi^{(j-1)}(x_k)]_{j,k=1}^N \geq 0. \quad (10.3)$$

Условие (10.3) уже влечет тотальную положительность меры  $M$  на  $\mathbb{R}$ , как описано в теореме 2.3 в книге [Kar68]. Мы не будем приводить доказательство этого факта. Перейдем к доказательству теоремы 10.3.

*Доказательство.* Будем доказывать эквивалентность в теореме путем переформулировки одного условия в другое.

Фиксируем  $N = 1, 2, \dots$ . Обозначим функцию на  $H(N)$ ,

$$H(N) \ni A \mapsto F(a_1) \dots F(a_N),$$

где  $a_i$  — собственные значения матрицы  $A$ , через  $F^{\circ N}(A)$ . Если выполнено условие (\*), то обратное преобразование Фурье функции  $F^{\circ N}$  неотрицательно, что означает, что спаривание этого обратного преобразования Фурье с любой неотрицательной функцией из пространства Шварца также неотрицательно.

Пусть  $\psi(B)$  — произвольная неотрицательная функция на  $H(N)$ , которая быстро убывает на бесконечности. Условие (\*) равносильно тому, что

$$\int_{H(N)} F^{\circ N}(A) \overline{\hat{\psi}(A)} dA \geq 0,$$

где  $dA$  — мера Лебега на  $H(N)$ . Перепишем данный многомерный интеграл в одномерный. Функция  $F^{\circ N}(A)$  зависит только от собственных значений  $A$ , поэтому является унитарно инвариантной. Функцию  $\overline{\hat{\psi}(A)}$  можно усреднить по действию группы  $U(N)$ , так что ее также можно считать унитарно инвариантной. Интеграл от унитарно инвариантной функции по  $H(N)$  можно свести к  $N$ -кратному интегралу по мере Лебега с помощью следующей леммы.

**Лемма 10.4.** Пусть  $G$  — унитарно инвариантная функция на  $H(N)$ , то есть, для всех  $U \in U(N)$  выполнено  $G(UAU^{-1}) = G(A)$ . Тогда

$$\int_{H(N)} G(A) dA = \text{Const} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} V(a_1, \dots, a_N)^2 G(a_1, \dots, a_N) da_1 \dots da_N.$$

Здесь  $G(a_1, \dots, a_N)$  — функция от диагональной матрицы  $\text{diag}(a_1, \dots, a_N)$ .

<sup>48</sup>Здесь и далее  $F$  — преобразование Фурье меры  $M$ .

<sup>49</sup>На самом деле, условие наличия плотности и ее бесконечная гладкость — это не очень обременительные условия.

Данная лемма будет доказана позже. Эта лемма обобщает известный способ перехода к полярным координатам:  $dx dy = r dr \cdot d\tau$ , где  $r$  — радиус, а  $\tau$  — угловая координата. Условие унитарной инвариантности здесь надо заменить на условие инвариантности относительно поворотов плоскости.

Таким образом, с помощью леммы 10.4 можно записать

$$\begin{aligned} \int_{H(N)} F^{\circ N}(A) \overline{\hat{\psi}(A)} dA &= \\ &= \text{Const} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} F(a_1) \dots F(a_N) V(a_1, \dots, a_N) \times \\ &\quad \times \overline{V(a_1, \dots, a_N) \hat{\psi}(a_1, \dots, a_N)} da_1 \dots da_N. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Сначала посчитаем обратное преобразование Фурье от функции

$$F(a_1) \dots F(a_N) V(a_1, \dots, a_N).$$

Каково обратное преобразование Фурье функции  $F$  — известно, это функция  $\varphi(b)$ . Отметим, что умножение на переменную  $a$  при обратном преобразовании Фурье переходит в применение оператора дифференцирования  $i \frac{\partial}{\partial a}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Фурье}^{-1}(F(\cdot) \dots F(\cdot) V(\cdot, \dots, \cdot)) &= \\ &= i^{N(N-1)/2} V\left(\frac{\partial}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial b_N}\right) \varphi(b_1) \dots \varphi(b_N) = \\ &= i^{N(N-1)/2} \det[\varphi^{(N-j)}(b_k)]_{j,k=1}^N = \\ &= (-i)^{N(N-1)/2} \det[\varphi^{(j-1)}(b_k)]_{j,k=1}^N. \end{aligned}$$

Теперь вычислим

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_N) \hat{\psi}(a_1, \dots, a_N) &= \\ &= V(a_1, \dots, a_N) \int_{H(N)} e^{i \text{Tr}(AB)} \psi(B) dB = \\ &= V(a_1, \dots, a_N) \cdot \frac{0! \dots (N-1)!}{i^{N(N-1)/2}} \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\det[e^{i a_j b_k}]_{k,j=1}^N}{V(a) V(b)} V(b_1, \dots, b_N)^2 db_1 \dots db_N. \end{aligned}$$

В последнем переходе использовалась унитарная инвариантность функции  $\psi(B)$ . Интеграл по  $H(N)$  распадается на интеграл по  $\mathbb{R}^N$  и интеграл по  $U(N)$ . При этом возникает множитель  $V(b_1, \dots, b_N)^2$ . Полученный интеграл

по  $U(N)$  является орбитальным интегралом, и его мы уже считали в лекции 8. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_N) \hat{\psi}(a_1, \dots, a_N) &= \\ &= \text{Const}(-i)^{N(N-1)/2} \text{Фурье}_{\mathbb{R}^N}(V(b)\psi(b_1, \dots, b_N)). \end{aligned}$$

В итоге (10.4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F(a_1) \dots F(a_N) V(a) \overline{V(a) \hat{\psi}(a_1, \dots, a_N)} da_1 \dots da_N &= \\ &= \text{Const} \int_{\mathbb{R}^N} \det[\varphi^{(j-1)}(b_k)]_{j,k=1}^N \cdot V(b)\psi(b_1, \dots, b_N) db. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Здесь  $\text{Const}$  — положительная константа. Так как функция  $\psi$  унитарно инвариантна, она симметрична по  $b_1, \dots, b_N$ . Видно, что и весь интеграл симметричен по  $b_1, \dots, b_N$ . Таким образом, его можно свести к интегрированию по области  $b_1 > \dots > b_N$ . В этой области  $V(b) > 0$ . Условие (\*) равносильно тому, что интеграл по этой области неотрицателен для всех  $\psi$ . Поэтому условие (\*) равносильно условию (10.3), что и доказывает теорему.  $\square$

О том, как из теоремы 10.3 получить тотальную положительность, описано в [Kar68, теорема 2.3].

## 10.4 Лемма о радиальной части

Здесь мы приведем доказательство леммы 10.4. Вариант данной леммы для унитарной группы лежит в основе доказательства ортогональности характеров

$$\chi_\lambda(U) = \frac{\det[u_k^{\lambda_j + N - j}]}{V(u_1, \dots, u_N)}, \quad U \in U(N).$$

при разных  $\lambda$  по мере Хаара на  $U(N)$ . Здесь  $u_j$  — собственные значения  $U \in U(N)$ . Отметим, что утверждение о том, что радиальная часть меры Хаара на унитарной группе имеет плотность  $|V(u_1, \dots, u_N)|^2$ , принадлежит Г. Вейлю. Если знать, что плотность имеет такой вид, то скалярное произведение двух характеров  $\chi_\lambda$  и  $\chi_\mu$  записывается в виде

$$(\chi_\lambda, \chi_\mu) = \int \chi_\lambda \bar{\chi}_\mu dU = \int_{\mathbb{T}^N} \det[u_k^{\lambda_j + N - j}] \cdot \overline{\det[u_k^{\mu_j + N - j}]} \cdot du_1 \dots du_N.$$

Если  $\lambda \neq \mu$ , то данный интеграл равен нулю в силу ортогональности мономов на  $\mathbb{T}$ .

Лемма 10.4 является евклидовым аналогом утверждения Г. Вейля и доказывается несколько проще. Отметим также, что оба утверждения — и лемма 10.4, и ее аналог для  $U(N)$  — лежат в основе теории случайных матриц.

Перейдем к доказательству леммы 10.4.

Есть пространство  $H(N)$ , на нем действует группа преобразований  $U(N)$ ,

$$A \mapsto UAU^{-1}, \quad U \in U(N).$$

Типичная матрица  $A \in H(N)$  может быть записана в виде

$$A = UD_aU^{-1}, \quad D_a = \text{diag}(a_1, \dots, a_N).$$

Таким образом, для типичной матрицы можно ввести координаты

$$A \leftrightarrow (a, U), \quad a \in \mathbb{R}^N, \quad U \in U(N).$$

Это не биекция, и на самом деле для всех матриц  $A$  следует писать

$$A \leftrightarrow (a, U/T),$$

где  $T$  — тор, стабилизатор  $a$ . Обозначим  $\dot{U} = U \bmod T$ . Задача состоит в нахождении плотности, или якобиана, в следующем выражении

$$dA = (?) \cdot da d\dot{U}.$$

Так как евклидова мера Лебега на  $H(N)$  инвариантна под действием  $U(N)$ , то искомая плотность не может зависеть от  $U$ .

Пусть  $U = 1 + X$  с точностью до малых более высокого порядка, где  $X$  — антиэрмитова матрица. Можно считать, что в  $X$  на диагонали стоят нули. Тогда  $U^{-1} = 1 - X$ , и теперь необходимо вычислить  $(1 + X)D_a(1 - X)$ . Пусть  $A$  — диагональная матрица, а  $dA$  — ее малое приращение. Тогда в малых параметрах запишем

$$(1 + dX)(A + dA)(1 - dX) = dA + dX \cdot A - A \cdot dX + \dots,$$

где точками обозначены малые более высокого порядка.

Пусть  $X = (X_{jk})$ , и  $dX_{jk}$  — малый внедиагональный элемент матрицы. Так как  $X$  — антиэрмитова матрица, то имеет смысл рассматривать  $dX_{jk}$  лишь над диагональю. На  $jk$ -м месте в матрице  $dX \cdot A - A \cdot dX$  стоит

$$dX_{jk}a_k - a_jdX_{jk} = (a_k - a_j)dX_{jk}.$$

Так как  $X_{jk}$  — комплексные переменные, то в смысле меры Лебега данное рассуждение показывает, что искомая плотность (якобиан) равна

$$V(a_1, \dots, a_N)^2 = \prod_{k < j} (a_k - a_j)^2.$$

Таким образом, лемма 10.4 установлена.

Доказательство аналогичного утверждения о радиальной части меры Хаара на унитарной группе можно провести почти так же (однако, возникнут некоторые осложнения, связанные с тем, что пространство будет «кривым»).

## 10.5 Тотальная положительность и теория вероятностей

Опишем, как связана тотальная положительность с теорией вероятностей. Открытие этой связи принадлежит Карлину и МакГрегору.

Пусть задан диффузионный процесс на  $\mathbb{R}$ , то есть, марковский процесс с непрерывным временем, траектории которого непрерывны.<sup>50</sup> Пусть переходная функция этого процесса  $p(t, x, y)$ . Говоря неформально,  $p(t, x, y)dy$  — это вероятность события, состоящего в том, что процесс, выйдя из точки  $x$ , через время  $t$  окажется в малой окрестности  $[y, y + dy]$  точки  $y$ .

Пусть заданы  $N$  одинаковых диффузионных процессов с переходной функцией  $p(t, x, y)$ . Пусть заданы точки  $x_1 > \dots > x_N$  и  $y_1 > \dots > y_N$ . Мы рассматриваем  $N$  одинаковых независимых процессов, которые выходят из точек  $x_1, \dots, x_N$ . Ясно, что плотность вероятности события, состоящего в том, что для каждого  $i = 1, \dots, N$  процесс, вышедший из  $x_i$ , через время  $t$  попадет в  $y_i$ , равна

$$\prod_{i=1}^N p(t, x_i, y_i).$$

Наложим дополнительное условие, состоящее в том, что траектории процессов, идущих из  $x_i$  в  $y_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) не пересекаются. Вероятность указанного события с условием непересечения равна

$$\det[p(t, x_i, y_j)]_{i,j=1}^N.$$

Это может быть доказано с использованием идеи инволюции, см. [Оль09, Лемма 6.8].

Вероятность любого события неотрицательна, поэтому для всех  $x_i$  и  $y_i$  имеем  $\det[p(t, x_i, y_j)]_{i,j=1}^N \geq 0$ . Это значит, что для каждого фиксированного  $t$  ядро  $p(t, x, y)$  является тотально положительным. Тотально положительных ядер двух переменных слишком много, но если  $p(t, x, y) = p(t, x - y)$ , то уже можно пытаться классифицировать возможные марковские процессы.

У данной идеи есть дискретные аналоги, она может использоваться для исследования марковских процессов на некоторых «одномерных» графах, и т.д.

## 11 Классификация эргодических мер на $H$

Более подробно о классификации вероятностных мер на  $H$ , эргодических относительно действия  $U(\infty)$ , см. в работе [OV96].

### 11.1 Формулировка результата

В этой лекции приводится классификация вероятностных мер на множестве всех эрмитовых матриц  $H$ , которые эргодичны относительно действия финитной унитарной группы  $U(\infty)$  на  $H$  (сопряжениями). Класси-

<sup>50</sup>Для диффузии необходимы еще некоторые условия, мы их опустим.

фикация проводится в терминах характеристических функций мер. Если  $M \in \mathfrak{M}(H)^{U(\infty)}$ , то определяется характеристическая функция

$$f_M(A) := \int_H e^{i\text{Tr}(AB)} M(dB),$$

где  $A \in H(\infty)$ , а  $H(\infty)$  — пространство финитных эрмитовых матриц. Пространство  $H(\infty)$  является двойственным к пространству  $H$ .

В предыдущих лекциях мы обсуждали, как можно догадаться до искомой классификации. А именно, был сделан вывод, что характеристическая функция  $f_M(A)$  эргодической меры имеет вид  $f_M(A) = \prod_{j=1}^{\infty} F(a_j)$ , где  $a_1, a_2, \dots$  — собственные значения матрицы  $A$ . При этом функция  $F$  на  $\mathbb{R}$  — это преобразование Фурье totally положительной вероятностной меры на  $\mathbb{R}$ . Сформулируем полный ответ, как выглядит функция  $F$ . Она зависит от бесконечного числа параметров. Эти параметры таковы. Пусть  $\{x_j\}$  — набор точек на  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ , причем  $\gamma_2 \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$ . Функция  $F$  имеет вид

$$F(a) = e^{i\gamma_1 a - \gamma_2 a^2 / 2} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-ix_j a}}{1 - ix_j a}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (11.1)$$

Сделаем несколько замечаний о формуле (11.1).

- Во-первых, сдвиг пространства  $H$  на константу,  $B \mapsto B + \text{Const} \cdot \mathbf{1}$ , переводит эргодические меры в эргодические. Данный сдвиг приводит к возникновению параметра  $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ .
- Условие  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$  слабее, чем  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j < \infty$ . Если выполнено второе, более сильное условие, то от экспонент под знаком произведения в (11.1) можно избавиться. Однако, эти множители при более слабом условии  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$  обеспечивают сходимость произведения (11.1). Действительно,

$$\frac{1}{1 - ixa} = 1 + O(x), \quad \frac{e^{-ixa}}{1 - ixa} = 1 + O(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

- Вместо параметра  $\gamma_2$  лучше рассматривать параметр

$$\delta := \gamma_2 + \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2.$$

Тогда пространство параметров  $\{(x_j), \delta, \gamma_1\}$  вкладывается в бесконечномерное пространство с продакт-топологией

$$\{(x_j), \delta, \gamma_1\} \subset \mathbb{R}^{\infty+1} \times \mathbb{R}.$$

Причем пространство  $\{(x_j), \delta\}$  выделяется в  $\mathbb{R}^{\infty+1}$  условием  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \delta$ , что на самом деле обеспечивает локальную компактность пространства параметров. Отметим, что функция  $\gamma_2 = \delta - \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2$  не является непрерывной на этом локально компактном пространстве.

## 11.2 Аппроксимация характеристических функций

Идея доказательства теоремы о классификации (разд. 11.1) по существу та же, что для случая унитарной группы (см. первую часть лекций [Оль09]).

Примем на веру следующий принцип аппроксимации: если  $M$  — эргодическая мера на  $H$ , то существует последовательность эргодических (=орбитальных) мер  $M_N$  на  $H(N)$ , которые сходятся к  $M$ . Понятие сходимости определяется следующим образом. Для каждого  $N_0 = 1, 2, \dots$  существует проекция  $H \rightarrow H(N_0)$ , состоящая в рассмотрении верхней левой подматрицы размера  $N_0 \times N_0$ . Аналогичная проекция  $H(N) \rightarrow H(N_0)$  определена и для всех  $N \geq N_0$ . Говорим, что последовательность мер  $M_N$  на  $H(N)$  сходится к мере  $M$  на  $H$  при  $N \rightarrow \infty$ , если для любого фиксированного  $N_0$  выполнена слабая сходимость мер  $M_N|_{H(N_0)}$  (эти меры определены для всех достаточно больших  $N$ ) к  $M|_{H(N_0)}$ . Слабая сходимость этих мер на  $H(N_0)$  равносильна равномерной сходимости их характеристических функций на компактах.

Таким образом, для исследования эргодических мер надо рассматривать последовательности  $\{f_N\}$  неразложимых инвариантных положительно определенных нормированных функций на  $H(N)$  и исследовать их пределы в указанном выше смысле. В качестве пределов  $f_N$  выступают функции  $f$  на  $H(\infty)$ . Задача состоит в описании всех пределов  $f$ , которые могут так возникнуть. При этом также будут получены условия, при которых последовательность функций  $\{f_N\}$  сходится.

Неразложимые инвариантные положительно определенные нормированные функции  $f_N$  на  $H(N)$  суть характеристические функции орбитальных мер. Они индексируются наборами  $N$  чисел  $\lambda(N) \in \mathbb{R}^N$ . Будем записывать  $\lambda(N)$  как два набора

$$\lambda'_1(N) \geq \lambda'_2(N) \geq \dots \geq 0, \quad \lambda''_1(N) \leq \lambda''_2(N) \leq \dots \leq 0.$$

Отметим, что это аналогично разбиению сигнатуры на положительную и отрицательную части. Конечные последовательности  $\lambda'(N)$  и  $\lambda''(N)$  дополним нулями, чтобы не заботиться о числе элементов в них.

Сформулируем некоторые условия на рост  $\lambda(N)$ . Затем мы покажем, что эти условия необходимы и достаточны, чтобы последовательность характеристических функций  $f_N$  (соответствующих орбитальных мер), индексированных  $\lambda(N)$ , сходилась к функции  $f$  на  $H(\infty)$ .

**Определение 11.1.** Будем говорить, что последовательность  $\lambda(N) \in \mathbb{R}^N$

регулярна, если существуют пределы

$$\begin{aligned}
x'_j &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda'_j(N)}{N} \geq 0; \\
x''_j &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda''_j(N)}{N} \leq 0; \\
\gamma_1 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \lambda'_j(N) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda''_j(N) \right) \in \mathbb{R}; \\
\delta &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left( \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda'_j(N))^2 + \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda''_j(N))^2 \right) \geq 0.
\end{aligned} \tag{11.2}$$

Дефект  $\gamma_2$  определяется как  $\gamma_2 = \delta - \sum_{j=1}^{\infty} (x'_j)^2 - \sum_{j=1}^{\infty} (x''_j)^2$ .

**Замечание 11.2.** Отметим, что последовательности  $x'_j$  и  $x''_j$  являются соответственно положительной и отрицательной частью последовательности  $x_j$ , рассмотренной в разд. 11.1.

**Замечание 11.3.** Отметим случай, когда возникает дефект  $\gamma_2 > 0$ . Пусть  $\lambda(N)$  имеет  $N$  ненулевых компонент, примерно половина из них положительные, а половина — отрицательные. При этом положительные компоненты имеют порядок  $\sqrt{N}$ , а отрицательные — порядок  $(-\sqrt{N})$ . Таким образом,  $x'_j = x''_j = 0$  для всех  $j$ ,  $\gamma_1 = 0$ , и  $\delta = \gamma_2 = 1$ .

### 11.3 Инфинитезимальная сходимость

Перейдем к доказательству достаточности условий регулярности (определение 11.1) для сходимости функций  $f_N$  к  $f$ .

Вместо сходимости орбитальных интегралов на компактах рассмотрим более простую сходимость — сходимость коэффициентов Тейлора при разложении характеристических функций по функциям Шура. Далее будет объяснено, как из этой инфинитезимальной сходимости получить глобальную сходимость, а именно, равномерную сходимость на компактах.

Так как характеристические функции эргодических (=орбитальных в конечномерном случае) мер являются симметрическими (в силу унитарной инвариантности), то раскладывать их следует именно по симметрическим функциям. В нашем случае их удобно раскладывать по функциям Шура. Данное разложение орбитальных интегралов было получено в лекции 8.

Пусть  $\lambda(N) \in \mathbb{R}^N$  и пусть  $\Lambda(N)$  — диагональная матрица с собственными значениями  $\{\lambda_j(N)\}$ . Рассмотрим орбитальную меру, соответствующую  $\Lambda(N)$ , и ее преобразование Фурье:

$$f_{\Lambda(N)}(A) = \int_{U(N)} e^{i \text{Tr}(AU\Lambda(N)U^{-1})} dU.$$

Существует детерминантная формула для  $f_{\Lambda(N)}(A)$ , а мы будем использовать разложение по функциям Шура. Более подробно см. лекцию 8. Разложение по функциям Шура имеет вид

$$f_{\Lambda(N)}(A) = \sum_{\mu} \frac{i^{|\mu|}}{(N)_{\mu}} s_{\mu}(a_1, \dots, a_N) s_{\mu}(\lambda_1(N), \dots, \lambda_N(N)), \quad (11.3)$$

где  $a_j$  — собственные значения  $A$ , сумма ведется по всем разбиениям (=диаграммам Юнга)  $\mu$ , таким, что  $\ell(\mu) \leq N$ . Величина  $(N)_{\mu}$  определяется как  $(N)_{\mu} = \prod_{\square \in \mu} (N + c(\square))$ , см. также предложение 3.4.

Разложение (11.3) будем рассматривать как разложение Тейлора по функциям по  $s_{\mu}(a_1, \dots, a_N)$ . Будем исследовать асимптотику коэффициентов этого разложения. Покажем, что из условий регулярности (11.2) следует существование предела коэффициента при  $s_{\mu}(a)$  в (11.3) для каждого разбиения  $\mu$ . В силу стабильности функций Шура  $s_{\mu}(a)$  и определения сходимости функций  $f_N$  на  $H(N)$ , данного выше, разложения Тейлора (11.3) при разных  $N$  согласованы.

Пусть  $c_{\mu}^{(N)}$  — коэффициент разложения, равный

$$c_{\mu}^{(N)} = i^{|\mu|} \frac{s_{\mu}(\lambda_1(N), \dots, \lambda_N(N))}{(N)_{\mu}}.$$

Сначала рассмотрим случай  $\mu = (m, 0, 0, \dots)$ . Другими словами, мы будем рассматривать сходимость  $f_{\Lambda(N)}$  в проекции на  $H(1)$ . В виду однородности функций Шура и того, что  $(N)_{\mu} \sim N^{|\mu|}$ , имеем

$$c_{\mu}^{(N)} \sim i^m h_m \left( \frac{\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{\lambda_N(N)}{N} \right).$$

Здесь  $h_m = s_{(m,0,0,\dots)}$  — полная однородная симметрическая функция.

Рассмотрим производящую функцию  $c_{(m,0,0,\dots)}^N$ :

$$\sum_{m \geq 0} a^m h_m \left( \frac{i\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{i\lambda_N(N)}{N} \right).$$

Сходимость коэффициентов  $h_m \left( \frac{i\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{i\lambda_N(N)}{N} \right)$  этой производящей функции эквивалентна сходимости коэффициентов логарифма этой производящей функции. Есть известное тождество для формальных степенных рядов:

$$\log \sum_{m \geq 0} h_m a^m = \sum_{m \geq 1} \frac{p_m}{m} a^m.$$

где  $p_m$  — степенные суммы, см. [Мак84, Гл. I, §2].

Пусть выполнены условия регулярности (11.2) для  $\lambda(N)$ . Рассмотрим отдельно сходимость  $p_1, p_2$ , а также всех  $p_m, m \geq 3$ . Ясно, что из условий регулярности следует, что

$$p_1 \left( \frac{i\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{i\lambda_N(N)}{N} \right) \rightarrow i\gamma_1, \quad N \rightarrow \infty$$

и

$$p_2 \left( \frac{i\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{i\lambda_N(N)}{N} \right) \rightarrow (-\delta), \quad N \rightarrow \infty.$$

Сходимость  $p_m$ ,  $m \geq 3$ , уже можно проверять почленно, переставляя предел по  $N$  и суммирование в степенной сумме. Возможность перестановки суммы и предела связана с тем, что  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j < \infty$  (проверьте!).

Таким образом, мы видим, что производящая функция коэффициентов  $c_{(m,0,\dots)}^{(N)}$ , которые отвечают проекции  $f_{\Lambda(N)}$  на  $H(1)$ , при выполнении условий регулярности (11.2) сходится к  $F(a)$  (11.1). Сходимость коэффициентов  $c_{\mu}^{(N)}$  следует из формулы Якоби-Труди.

Формула Якоби-Труди выражает функции Шура  $s_{\mu}$  через полные симметрические функции  $h_m$  следующим образом:

$$s_{\mu} = \det [h_{\mu_i - i + j}].$$

Считается, что  $h_k = 0$  для  $k < 0$ , а порядок детерминанта может быть любой  $\geq \ell(\mu)$ .

Применение формулы Якоби-Труди для доказательства сходимости коэффициентов  $c_{\mu}^{(N)} \rightarrow c_{\mu}$ ,  $N \rightarrow \infty$ , основано на следующем общем факте. Пусть  $F(a) = \sum_{m \geq 0} c_m a^m$ , тогда для любого  $N_0 = 1, 2, \dots$  имеем

$$F(a_1) \dots F(a_{N_0}) = \sum_{\mu} c_{\mu} s_{\mu}(a_1, \dots, a_{N_0}),$$

где сумма ведется по всем разбиениям  $\mu$  с  $\ell(\mu) \leq N_0$ , и

$$c_{\mu} = \det [c_{\mu_i - i + j}].$$

## 11.4 Глобальная сходимость

Теперь покажем, как из установленной инфинитезимальной сходимости можно получить глобальную сходимость функций  $f_{\Lambda(N)}$ , то есть, равномерную сходимость на компактах. Существует два способа.

### 11.4.1 Первый способ

Функции  $f_N$  являются положительно определенными и аналитическими, причем  $f_N(0) = 1$ . Равномерная сходимость на компактах функций  $f_N$  к аналитической функции  $f$  следует из покоэффициентной сходимости, если коэффициенты Тейлора функции  $f$  растут не слишком быстро. Более конкретно, требуется, чтобы проблема моментов, связанная с функцией  $f$ , имела единственное решение, то есть, чтобы можно было однозначно определить меру, преобразованием Фурье которой является  $f$ . Ясно, что если такую меру определить однозначно нельзя, то неясно, к какой мере будут сходиться орбитальные меры, отвечающие  $f_N$ .

### 11.4.2 Второй способ

Второй способ состоит в том, чтобы получить оценку вида

$$|c_{(m,0,0,\dots)}^{(N)}| \leq c_1 c_2^m$$

равномерно по  $m$ . Данная оценка может быть легко установлена, она гарантирует равномерную сходимость рядов Тейлора для  $f_N$  в некоторой окрестности нуля, радиус которой не зависит от  $N$ . Это влечет равномерную сходимость  $f_N$  к  $f$  на компактах.

## 11.5 Необходимость условий регулярности

Теперь предположим, что последовательность  $\lambda(N) \in \mathbb{R}^N$  такова, что характеристические функции  $f_{\Lambda(N)}$  сходятся равномерно к некоторой функции  $f$  на компактах. Здесь  $\Lambda(N)$  — диагональная матрица с собственными значениями  $\{\lambda_j(N)\}$ , а  $f_{\Lambda(N)}$  — преобразование Фурье орбитальной меры, сосредоточенной на орбите, проходящей через  $\Lambda(N)$ . Покажем, что если  $f_{\Lambda(N)}$  сходятся к  $f$ , то выполнены условия регулярности (11.2). Отметим, что здесь рассуждения значительно проще, чем в случае с характеристиками группы  $U(\infty)$  (см. первую часть лекций [Оль09], в частности, лекцию 5).

Рассмотрим поведение величины

$$p_1 \left( \frac{\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{\lambda_N(N)}{N} \right)^2 + p_2 \left( \frac{\lambda_1(N)}{N}, \dots, \frac{\lambda_N(N)}{N} \right) \geq 0, \quad (11.4)$$

и рассмотрим ее супремум. Если он конечен, то по подпоследовательности можно получить предельные параметры  $\{(x_j), \gamma_1, \delta\}$ , и по любой другой подпоследовательности будет сходимость (11.2) к тем же предельным параметрам.

Предположим теперь, что супремум по  $N$  величин (11.4) бесконечен. Выбирая подпоследовательность, можно считать, что величины (11.4) стремятся к бесконечности. Тогда существует последовательность  $\varepsilon_N \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_N > 0$ , такая, что если заменить  $\lambda(N)$  на  $\varepsilon_N \lambda(N)$ , то супремум величин (11.4) будет уже конечен. То есть, перенормированные функции

$$\tilde{f}_N(A) := f_N(\varepsilon_N A)$$

будут сходить к какой-то функции  $\tilde{f}$ . Можно выбрать  $\varepsilon_N$  такими, что хотя бы одно из чисел  $\gamma_1$  или  $\delta$  будет отлично от нуля. Таким образом, набор параметров функции  $\tilde{f}$  нетривиален, что означает, что эта функция не равна тождественно единице.

Возникает противоречие, так как  $f_N$  сходятся к  $f$  равномерно на компактах, а перенормированные функции  $\tilde{f}_N$  сходятся к какой-то функции  $\tilde{f} \neq 1$ . Это противоречит непрерывности предельной функции  $f$ .

Таким образом, теорема о классификации эргодических мер на  $H$ , сформулированная в разд. 11.1, установлена. Более подробно см. в работе [OV96].

## 12 Строение эргодических мер

Здесь мы подробно обсудим, как устроены вероятностные меры на  $H$ , эргодические относительно действия  $U(\infty)$ , а также построим важное семейство мер на  $H$ , которые не являются эргодическими, но являются инвариантными относительно действия  $U(\infty)$ .

### 12.1 Напоминание

Напомним, что вероятностные меры на  $H$ , эргодические относительно действия  $U(\infty)$ , находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями на  $\mathbb{R}$  вида

$$F(a) = \exp\left(i\gamma_1 a - \gamma_2 \frac{a^2}{2}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-ix_k a}}{1 - ix_k a},$$

где  $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_2 \geq 0$ ,  $x_j \in \mathbb{R}$ , и  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$ . Функция  $F(a)$  кодирует характеристическую функцию эргодической меры  $M$  на  $H$  в том смысле, что

$$\int_H e^{i\text{Tr}(AB)} M(dB) = \prod_{k=1}^n F(a_k),$$

где  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_k)$  — произвольная матрица из  $H(\infty)$ , которую можно считать диагональной, так как характеристическая функция унитарно инвариантна.

Эргодические меры на  $H$  — это бесконечномерный аналог орбитальных мер. Возникает вопрос, можно ли описать эти меры более явно, чем в терминах их характеристических функций.

Отметим, что смысл параметра  $\gamma_1$  в  $F(a)$  ясен — он отвечает за сдвиг меры, то есть, если рассмотреть сдвиг пространства  $H$ ,  $B \mapsto B + c\mathbf{1}$ , то эргодическая мера перейдет в эргодическую, а параметр  $\gamma_1$  у новой меры станет равен  $\gamma_1 + c$ .

### 12.2 Гауссовский случай

Опишем, какая мера получится, если положить  $\gamma_1 = 0$  и  $x_1 = x_2 = \dots = 0$ . Пусть  $\gamma_2 > 0$ .<sup>51</sup> Тогда мера  $M$  на  $H$  — гауссовская. Опишем, как строится случайная матрица  $B \in H$ , распределенная по этой мере. Матрица  $B$  эрмитова, и поэтому ее диагональные элементы  $B_{kk}$  вещественны, а элементы  $B_{kl}$ ,  $k > l$ , однозначно восстанавливаются по  $B_{kl}$ ,  $k < l$ . Чтобы получить матрицу, распределенную по  $M$  с указанными параметрами, следует взять  $B_{kk} \sim N(0, \gamma_2)$ , и  $B_{kl} \sim N(0, \gamma_2) + iN(0, \gamma_2)$ , где  $k < l$ . Другими словами,  $B_{kk}$  имеют нормальное распределение со средним 0 и дисперсией  $\gamma_2$ , а у комплексных случайных величин  $B_{kl}$  ( $k < l$ ) действительная и мнимая

<sup>51</sup>Если все параметры меры равны нулю, то это — дельта-мера на  $H$ , сосредоточенная в нулевой матрице.

части независимы и также имеют нормальное распределение со средним 0 и дисперсией  $\gamma_2$ . При этом все величины  $B_{kk}$  и  $B_{kl}$  ( $k < l$ ) независимы в совокупности.

Заметим еще, что параметр  $\gamma_2$  может меняться при гомотетиях пространства  $H$ . Гомотетия — еще одно преобразование, которое переводит эргодические меры в эргодические.

### 12.3 Описание эргодических мер, связанных с $x_j$

Пусть теперь  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  (значение этих параметров мы выяснили), и сначала рассмотрим случай, когда  $x_1 = x \neq 0$ , а все остальные  $x_j$  равны нулю. Пусть  $\mu$  — гауссовская мера на  $\mathbb{C}$  (отождествим  $\mathbb{C}$  с  $\mathbb{R}^2$ ) следующего вида:

$$\mu(dz) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} dz,$$

где  $dz$  обозначает меру Лебега на  $\mathbb{C}$ . Рассмотрим пространство  $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots$  с мерой  $\mu^{\otimes \infty} = \mu \otimes \mu \otimes \dots$ . Пусть  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathbb{C}^\infty$  — случайная вектор-строка, распределенная по мере  $\mu^{\otimes \infty}$ . Построим по  $\xi$  матрицу  $B \in H$ :

$$B := x(\xi^* \xi - \mathbf{1}). \quad (12.1)$$

Матрица  $\xi^* \xi$  имеет ранг единица. Ясно, что матрица  $B$  унитарно инвариантна, так как распределение  $\xi$  не меняется при преобразованиях вида  $\xi \mapsto \xi U$ ,  $U \in U(\infty)$ .

Оказывается, матрица  $B \in H$  имеет распределение  $M$  с указанными выше параметрами. Можно вычислить (с помощью гауссовских интегралов), что соответствующая функция  $F$  имеет вид

$$F(a) = \frac{e^{-ixa}}{1 - ixa}.$$

Теперь рассмотрим случай нескольких конечных  $x_j$ . Пусть  $x_1, \dots, x_k$  отличны от нуля, а  $\gamma_1, \gamma_2$  и все остальные  $x_j$  равны нулю. Вместо  $\mathbb{C}^\infty$  рассмотрим пространство  $\mathbb{C}^{k \times \infty}$ , будем рассматривать его как пространство квадратных матриц с  $k$  строками и бесконечным числом столбцов. Пусть мера  $\mu$  на  $\mathbb{C}$  такая же, как выше, а на  $\mathbb{C}^{k \times \infty}$  рассмотрим меру  $\mu^{\otimes (k \times \infty)}$ . Пусть  $\Xi$  — случайная матрица (элемент  $\mathbb{C}^{k \times \infty}$ ), распределенная по этой мере. Пусть далее  $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_k)$ . Построим случайную матрицу  $B \in H$ :

$$B := \Xi^* X \Xi + y \mathbf{1},$$

где  $y \in \mathbb{R}$ . Можно показать, что случайная матрица  $B \in H$  распределена по эргодической мере  $M$  с параметрами  $x_1, \dots, x_k$  (все остальные  $x_j$  равны нулю),  $\gamma_2 = 0$  и  $\gamma_1 = y + x_1 + \dots + x_k$ . Таким образом, полагая  $y = -x_1 - \dots - x_k$ , можно получить искомую эргодическую меру.

## 12.4 Меры на $\mathbb{R}$ и их свертки

Пусть  $B \in H$  — случайная матрица, которая распределена по эргодической мере  $M$  с некоторыми параметрами  $\{x_j\}$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Рассмотрим какой-нибудь диагональный элемент матрицы, например,  $B_{11}$ . Оказывается, его распределение на  $\mathbb{R}$  имеет характеристическую функцию  $F(a)$ , которая соответствует всей мере  $M$ .<sup>52</sup> Таким образом,

$$F(a) = \mathbf{E}e^{iaB_{11}}.$$

Видно, что в эргодическом случае мера на  $H$  полностью определяется распределением величины  $B_{11}$ . Ясно, что для неэргодической меры это неверно.

Произведению характеристических функций на  $\mathbb{R}$  отвечает свертка мер.<sup>53</sup> Таким образом, характеристическая функция

$$F(a) = \exp\left(i\gamma_1 a - \gamma_2 \frac{a^2}{2}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-ix_j a}}{1 - ix_j a}$$

получается путем свертки некоторых распределений. Рассмотрим их по отдельности.

Множитель  $e^{i\gamma_1 a - \gamma_2 \frac{a^2}{2}}$  — это характеристическая функция нормального распределения  $N(\gamma_1, \gamma_2)$  со средним  $\gamma_1$  и дисперсией  $\gamma_2$ .

Пусть  $x > 0$  (если  $x < 0$ , то в итоге получится распределение, симметричное относительно нуля). Тогда

$$\frac{e^{-iax}}{1 - ia x}$$

— характеристическая функция сдвинутого экспоненциального распределения с плотностью

$$\nu(db) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}(b+x)}.$$

Среднее значения этой экспоненциальной случайной величины равно нулю.

Отметим, что если число ненулевых  $x_j$  бесконечно, то для определения случайной величины с характеристической функцией  $F(a)$  требуется предельный переход.

Отметим также, что можно рассматривать свертку мер и на пространстве  $H$ , так как  $H$  является абелевой группой, и определено сложение  $H \times H \rightarrow H$ . Если  $M_1$  и  $M_2$  — две вероятностные меры на  $H$ , то их свертка  $M_1 * M_2$  определяется как распределение случайной матрицы  $B^{(1)} + B^{(2)}$ , где  $B^{(i)}$  имеет распределение  $M_i$  и  $B^{(1)}$  и  $B^{(2)}$  независимы.

<sup>52</sup>В предыдущих лекциях мы рассматривали проекции  $H$  на  $H(N)$ . Распределение  $B_{11}$  получается в проекции на  $H(1)$ .

<sup>53</sup>Свертка  $\nu_1 * \nu_2$  двух вероятностных распределений  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — это распределение суммы независимых случайных величин  $X_1 + X_2$ , где  $X_i$  имеет распределение  $\nu_i$ .

## 12.5 Построение семейства неэргодических мер. Определения

Перейдем к построению важного семейства неэргодических мер на  $H$ . Эти меры являются унитарно инвариантными. Построение описано в работе [BO01] и опирается на вычисления в книге Хуа Ло-Кена [Хуа59]. Подобные меры рассматривались в работе Пикрелла [Pic87].

Пространство  $H$  представляет собой проективный предел пространств конечномерных матриц  $H(N)$ . Проекции определяются как

$$H(N) \rightarrow H(N-1), \quad H(N) \ni B = \begin{bmatrix} \hat{B} & \xi \\ \xi^* & t \end{bmatrix} \mapsto \hat{B} \in H(N-1).$$

Здесь  $\xi$  — вектор-столбец длины  $N-1$ , а  $t \in \mathbb{R}$ .

Каждая мера  $M$  на  $H$  путем проекций на  $H(N)$  порождает семейство мер  $\{M_N\}$ , которые удовлетворяют определенным условиям согласованности. Кроме того, каждому согласованному семейству  $\{M_N\}$  отвечает мера  $M$  на  $H$ . Это можно доказать с помощью теоремы Колмогорова о построении мер. Унитарная инвариантность меры  $M$  на  $H$  эквивалентна унитарной инвариантности каждой меры  $M_N$ .

Выпишем более подробно условия согласованности. Пусть каждая мера  $M_N$  на  $H_N$  имеет функцию плотности  $f_N$  относительно меры Лебега на  $H_N$ . Тогда последовательность мер  $\{M_N\}$  на  $H_N$  определяет унитарно инвариантную вероятностную меру  $M$  на  $H$  тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- Каждая функция  $f_N$  на  $H_N$  унитарно инвариантна, то есть, зависит лишь от собственных значений матрицы, причем симметричным образом.
- Для всех  $N = 2, 3, \dots$  выполнены следующие условия когерентности:

$$\int_{\xi, t} f_N \left( \begin{bmatrix} \hat{B} & \xi \\ \xi^* & t \end{bmatrix} \right) \xi dt = f_{N-1}(\hat{B}) \quad (12.2)$$

для каждой фиксированной матрицы  $\hat{B} \in H(N-1)$ .

- Выполнено условие нормировки, которое достаточно потребовать для  $N = 1$ :

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(b) db = 1.$$

## 12.6 Построение семейства неэргодических мер. Формулировка результата

Оказывается, что можно выбрать когерентное семейство мер  $M_N$  на  $H(N)$  с плотностями  $f_N$  следующим образом. Пусть  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$  — параметр. Рассмотрим функции вида

$$f_N(B) = c_N \cdot g_N(B), \quad B \in H(N), \quad (12.3)$$

где  $c_N$  — нормировочные константы, и

$$g_N(B) := \prod_{j=1}^N (1 + ib_j)^{-s-N} \prod_{j=1}^N (1 - ib_j)^{-\bar{s}-N}, \quad (12.4)$$

где  $b_1, \dots, b_N$  — собственные значения матрицы  $B$ . Здесь для определения степеней  $(1 + ib_j)^{-s-N}$  и  $(1 - ib_j)^{-\bar{s}-N}$  делается разрез в  $\mathbb{C}$  вдоль отрицательной полуоси, и в оставшейся области можно выбрать однозначную ветвь степени. Отметим, что для всех  $b_j$  числа  $1 \pm ib_j$  лежат на вертикальной прямой, проходящей через единицу, то есть, далеко от разреза.

Функцию  $g_N$  можно записать и следующим образом:

$$g_N(B) = \prod_{j=1}^N |(1 + ib_j)^{-s-N}|^2 = \det((\mathbf{1} + iB)^{-s-N}) \det((\mathbf{1} - iB)^{-\bar{s}-N})$$

Здесь матрицы  $(\mathbf{1} + iB)^{-s-N}$  и  $(\mathbf{1} - iB)^{-\bar{s}-N}$  определяются в функциональном исчислении для самосопряженных операторов. Ветви функций выбираются, как описано выше, спектр операторов  $\mathbf{1} \pm iB$  лежит на вертикальной прямой, проходящей через единицу, поэтому все корректно определено. Отметим, что нельзя было бы записать  $(\det(\mathbf{1} + iB))^{-s-N}$ , так как положение числа  $\det(\mathbf{1} + iB)$  на комплексной плоскости неизвестно.

В книге [Хуа59] рассматривался лишь случай  $s \in \mathbb{R}$ , введение комплексных  $s$  принадлежит Ю. Неретину.

## 12.7 Леммы

Были введены плотности  $f_N$  на  $H_N$ , для которых мы будем доказывать условие когерентности (12.2).

Приведем леммы, которые будут использованы в доказательстве.

**Лемма 12.1.** *Пусть квадратная матрица  $A$  разделена на прямоугольные блоки:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

*и пусть матрица  $A_{11}$  невырождена. Тогда*

$$\det A = \det A_{11} \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}).$$

*Доказательство.* Упражнение 12.3. □

Пусть  $\Pi_+$  — правая матричная полуплоскость:

$$\Pi_+ := \{A: A + A^* > 0\}.$$

Если  $A \in \Pi_+$ , то все собственные значения  $A$  также лежат в правой полуплоскости в  $\mathbb{C}$ . Поэтому можно для любого  $z$  определить степень  $A^z$  с

помощью голоморфного функционального исчисления, а именно, по формуле Коши. Кроме того, если  $\varphi$  — голоморфная функция, то

$$\varphi(A) := \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - A},$$

где контур окружает собственные значения матрицы  $A$ . Таким образом, если  $A \in \Pi_+$ , то можно рассмотреть ветвь  $A^z$  в  $\mathbb{C}$  с разрезом вдоль отрицательной полуоси, и так как все собственные значения  $A$  лежат в правой полуплоскости в  $\mathbb{C}$ , то можно выбрать контур, обходящий собственные значения, и целиком лежащий в правой полуплоскости.

Таким образом, матрица  $A^z$  определена.

**Лемма 12.2.** Пусть  $A \in \Pi_+$  и матрица  $A$  разделена на блоки,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

где матрица  $A_{11}$  невырождена. Тогда для  $z \in \mathbb{C}$  имеем

$$\det(A^z) = \det(A_{11}^z) \cdot \det((A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^z). \quad (12.5)$$

*Доказательство.* Можно показать, что  $A_{11} \in \Pi_+$  и также  $A_{22} - A_{12}A_{11}^{-1}A_{12} \in \Pi_+$ . Таким образом, все матрицы в правой части (12.5) определены.

Правая и левая часть (12.5) голоморфны как функции от матрицы, лежащей в правой матричной полуплоскости. Поэтому можно считать, что спектр  $A$  лежит близко к единице. В этом случае ясно, что  $\det(A^z) = (\det A)^z$  (и то же самое верно для матриц в правой части (12.5)), поэтому данная лемма следует из леммы 12.1.  $\square$

## 12.8 Подсчет

Теперь с использованием леммы 12.2 мы докажем условие когерентности (12.2), где  $f_N$  задано в (12.3)–(12.4). В лемме 12.2 рассмотрим  $A = 1 + iB$  (где  $B \in H(N)$ ) и  $z = -s - N$ , где  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$ .<sup>54</sup> Разбивая  $B \in H(N)$  на блоки,

$$B = \begin{bmatrix} \hat{B} & \xi \\ \xi^* & t \end{bmatrix}, \quad \hat{B} \in H(N-1),$$

будем вычислять интеграл

$$I := \int_{\xi, t} \det(A^{-s-N}) \det(\bar{A}^{-\bar{s}-N}) d\xi dt.$$

Используя лемму 12.2 с  $A_{11} = \hat{B}$ , и т.д., можно записать

$$I = \det \left( (1 + i\hat{B})^{-s-N} \right) \det \left( (1 - i\hat{B})^{-\bar{s}-N} \right) \times \\ \times \int_{\xi, t} \left[ (1 + it) + \xi^*(1 + i\hat{B})^{-1}\xi \right]^{-s-N} \left[ (1 - it) + \xi^*(1 - i\hat{B})^{-1}\xi \right]^{-\bar{s}-N} d\xi dt.$$

<sup>54</sup>Использование условия  $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$  реально видно не будет. Оно необходимо для сходимости некоторых интегралов.

Множитель, который вынесен из-под интеграла, не зависит от  $\xi$  и  $t$ . Под интегралом остается определитель матрицы  $1 \times 1$ .

Будем считать, что  $\hat{B} = \text{diag}(b_1, \dots, b_{N-1})$ , так как выражение  $I$  унитарно инвариантно по  $\hat{B}$ , если действовать унитарной группой  $U(N-1)$ .<sup>55</sup> Таким образом, в  $I$  перед интегралом возникнет множитель

$$\prod_{j=1}^{N-1} (1 + ib_j)^{-s-N} \prod_{j=1}^{N-1} (1 - ib_j)^{-\bar{s}-N}.$$

Теперь запишем

$$1 \pm it + \xi^* \left(1 \pm i\hat{B}\right)^{-1} \xi = 1 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{|\xi_j|^2}{1 + b_j^2} \pm i \left( t - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{b_j |\xi_j|^2}{1 + b_j^2} \right)$$

и заменим переменные  $(\xi, t)$  в интеграле. Обозначим  $t - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{b_j |\xi_j|^2}{1 + b_j^2}$  через (новое)  $t$  при постоянном  $\xi$ , от этого ничего не изменится. После этого обозначим  $\frac{\xi}{\sqrt{1 + b_j^2}}$  через новое  $\xi_j$ , это даст множитель вида  $\prod_{j=1}^{N-1} (1 + b_j^2)$  перед интегралом (так как  $d\xi$  — это  $(2N-2)$  вещественных переменных). Таким образом, когерентность (12.2) установлена.

Обсудим, как найти нормировочный множитель. Интеграл

$$\int_{\xi, t} \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} |\xi_j|^2 + it\right)^{-s-N} \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} |\xi_j|^2 - it\right)^{-\bar{s}-N} d\xi dt$$

следует переписать в полярных координатах, полагая  $r = \sum_{j=1}^{N-1} |\xi_j|^2$ . Интегрирование по угловым координатам даст некоторый множитель, а затем весь интеграл сведется к двумерному интегралу вида

$$\int_{r \geq 0, t \in \mathbb{R}} (1 + r + it)^{-s-N} (1 + r - it)^{-\bar{s}-N} dr dt.$$

Это интеграл типа бета-функции и его можно вычислить. Это позволяет найти нормировочные константы. Более подробно см. в статье [BO01].

## 12.9 Преобразование Кэли и меры на $U(N)$

Аналогично построенным мерам на  $H(N)$  можно рассматривать другие меры на различных пространствах бесконечномерных матриц, которые имеют схожую структуру (см., например, [Pic87]).

Например, рассмотрим унитарные матрицы. Проекция  $U(N) \rightarrow U(N-1)$ ,

$$U(N) \ni U = \begin{bmatrix} \hat{U} & \eta_1 \\ \eta_2 & u \end{bmatrix} \mapsto \hat{U} \in U(N-1)$$

<sup>55</sup>Матрицы из  $U(N-1)$  действуют также и на  $\xi$ , но от этого интеграл не меняется.

не согласованы с групповой операцией в  $U(N)$ , поэтому проективный предел  $U := \varprojlim U(N)$  не будет группой. Однако на  $U$  также можно рассматривать семейство мер, которое связано с построенными мерами на  $H(N)$ .

Преобразование Кэли переводит  $H(N)$  в  $U(N)$ . Наши меры на  $H(N)$ , построенные выше, при этом преобразовании переходят в меры на  $U(N)$ , которые имеют плотность, пропорциональную

$$\det((1+U)^s) \det((1+U^{-1}))^s,$$

где  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$  — тот же параметр. Эти меры на  $U(N)$  (и соответствующие меры на  $U$ ) очень важны. Например, при  $s = 0$  на  $U(N)$  получается равномерная мера.

Отметим, что при  $s = 0$  на  $H(N)$  возникает мера с плотностью, пропорциональной  $\det(1+B^2)^{-N}$ . Это можно рассматривать как обобщение вероятностного распределения Коши на  $\mathbb{R}$  с плотностью, пропорциональной  $\frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Отметим, что плотность Коши на  $\mathbb{R}$  возникает как образ при преобразовании Кэли равномерной меры на окружности.

## 12.10 Упражнения

**Упражнение 12.1.** Покажите, что если вектор(-строка)  $\xi$  имеет многомерное нормальное распределение со средним ноль и независимыми компонентами с одинаковой дисперсией, то преобразование  $\xi \mapsto \xi U$ , где  $U$  — унитарная матрица, не меняет распределение вектора  $\xi$ .

**Упражнение 12.2.** Вычислите явно функцию  $F(a)$ , отвечающую распределению матрицы  $B$  (12.1).

**Упражнение 12.3.** Докажите лемму 12.1.

**Упражнение 12.4.** Покажите, что если матрица  $A$  лежит в правой матричной полуплоскости

$$\Pi_+ = \{A: A + A^* > 0\},$$

то все ее собственные значения лежат в правой полуплоскости в  $\mathbb{C}$ .

**Упражнение 12.5.** Пусть матрица  $A \in \Pi_+$  разбита на блоки

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

где матрица  $A_{11}$  невырождена. Тогда  $A_{11} \in \Pi_+$ .

**Упражнение 12.6.** Пусть матрица  $A \in \Pi_+$  разбита на блоки, как выше, и блок  $A_{11}$  невырожден. Тогда, чтобы вычислить  $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ , надо взять матрицу  $A^{-1}$ , вырезать блок (22), и затем еще раз обратить полученную матрицу, то есть,

$$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = ((A^{-1})_{22})^{-1}.$$

**Упражнение 12.7.** Если  $A \in \Pi_+$ , то  $A^{-1} \in \Pi_+$ .

## 13 Заключение

### 13.1 Введение

В данной лекции подводится некий итог годового курса асимптотической теории представлений (первая часть курса — [Оль09]).

Исторически теория представлений исследовала последовательно конечные группы, затем компактные группы (главным образом, компактные группы Ли), затем некомпактные группы Ли. В случае компактных групп Ли удалось построить красивую и относительно простую теорию. Об этой теории см. фундаментальную книгу Г. Вейля [Вей07]. Были попытки развивать теорию бесконечномерных групп Ли (например, банаховых групп Ли), однако, на этом направлении есть лишь единичные успехи, связанные с некоторыми конкретными группами. Для некомпактных групп Ли Гельфандом, Хариш-Чандрой и др. была создана теория представлений, которая значительно сложнее, чем теория представлений компактных групп Ли.

Теория представлений бесконечномерной унитарной группы, рассмотренная в первой части лекций [Оль09], представляет собой бесконечномерное обобщение теории, связанной именно с компактными группами Ли. Пусть  $G(N)$  — некоторая цепочка вложенных классических групп и пусть

$$G = \varinjlim G(N)$$

— ее индуктивный предел. Модельный пример компактных групп  $G(N)$  — унитарные группы  $U(N)$ , а пример в некомпактном случае —  $GL(N, \mathbb{C})$ . Оказывается, что в некомпактном случае представления индуктивного предела  $G$  оказываются значительно более бедными, чем в компактном случае.

О представлениях бесконечномерных групп также можно посмотреть диссертацию [Оль89].

### 13.2 Фундаментальные факты о компактных группах

Попробуем понять, каковы фундаментальные факты о компактных группах, которые можно обобщать на их индуктивные пределы.

- На компактных группах существует нормированная (вероятностная) мера Хаара.
- Для компактных групп есть простая классификация неприводимых представлений.
- Если  $K$  — компактная группа и  $\widehat{K}$  — ее дуальный объект (то есть, множество всех неприводимых представлений  $K$ ), то справедлива теорема Петера–Вейля. А именно, рассмотрим  $L^2(K)$  — пространство  $L^2$ -функций по мере Хаара на  $K$ , и пусть  $R$  — (левое) регулярное представление  $K$  в  $L^2(K)$ . Тогда справедливо разложение

$$R = \bigoplus_{\pi \in \widehat{K}} \dim \pi \cdot \pi. \quad (13.1)$$

Можно сказать, что теорема Петера–Вейля решает задачу гармонического анализа для группы  $K$ . Общая (абстрактная) постановка этой задачи состоит в том, чтобы взять некоторое выделенное представление группы (или некоторый класс представлений), которое можно описать в «геометрических» терминах, и раскладывать это представление по неприводимым.

Для некомпактных групп все три факта (мера Хаара, классификация неприводимых представлений, теорема Петера–Вейля) нарушаются и усложняются. Мера Хаара на некомпактной группе уже не будет вероятностной. Классификация неприводимых представлений некомпактных групп в общем случае неизвестна, а для группы  $GL(N, \mathbb{C})$  была получена не так давно с большим трудом. Задача гармонического анализа (теорема Петера–Вейля) также значительно усложняется. В разложении (13.1) возникает непрерывный спектр, а сумма перестает быть прямой. Кроме того, левое регулярное представление уже не дает всех неприводимых представлений.

Оказывается, для индуктивных пределов компактных групп  $G = \varinjlim G(N)$  можно «изобрести» и меру Хаара, и классификацию неприводимых представлений, а также поставить и решить задачу гармонического анализа. В первой части лекций [Оль09] мы занимались классификацией представлений  $U(\infty)$ . В данной лекции будет сказано об аналоге меры Хаара и о задаче гармонического анализа.

Отметим, что для бесконечномерного обобщения теореме Петера–Вейля следует модифицировать следующим образом. Следует рассматривать двустороннее действие группы  $K \times K$  в пространстве  $L^2(K)$  по мере Хаара (здесь  $K$  — компактная группа). Обозначим это бигулярное представление через  $R^{\text{two-side}}$ . Тогда теорема Петера–Вейля эквивалентна тому, что

$$R^{\text{two-side}} = \bigoplus_{\pi \in \hat{K}} \pi \otimes \bar{\pi}. \quad (13.2)$$

Здесь уже получается однократный спектр. Представление  $\bar{\pi}$  — это представление, сопряженное к  $\pi$ . Утверждение (13.2) дает правильное понимание теоремы Петера–Вейля. Отметим, что в бесконечномерном случае именно объект  $\pi \otimes \bar{\pi}$  имеет смысл, он отождествляется со сферическим представлением пары  $(K \times K, \text{diag } K)$ .

### 13.3 «Мера Хаара», связанная с бесконечномерной унитарной группой

Мы будем рассматривать модельный пример, связанный с бесконечномерной унитарной группой  $U(\infty)$  (см. также [Оль09]). Возьмем  $K(N) = U(N)$ , это компактные группы. Пусть  $K = \varinjlim K(N) = U(\infty)$ . Оказывается, что пространство  $L^2(K)$  рассматривать нельзя, так как на  $U(\infty)$  нет инвариантной вероятностной меры. Оказывается, искомая «мера Хаара» может лежать не на  $U(\infty)$ , а на большем объекте. От этого большего объекта  $\mathfrak{U}$  требуется, чтобы  $L^2(\mathfrak{U})$  было  $G$ -пространством, где  $G = K \times K = U(\infty) \times U(\infty)$ .

В качестве  $\mathfrak{U}$  надо брать проективный предел групп  $U(N)$ . Этот объект уже не будет группой. Зато на нем возможно определить вероятностную меру, так, что в  $L^2(\mathfrak{U})$  группа  $U(\infty)$  действует слева и справа (то есть,  $L^2(\mathfrak{U})$  —  $G$ -пространство). Опишем объект  $\mathfrak{U} = \varprojlim U(N)$ .

Преобразование Кэли отождествляет (с точностью до множества меры нуль) группу  $U(N)$  с пространством  $H(N)$  эрмитовых матриц  $N \times N$ . На уровне эрмитовых матриц проекция  $H(N+1) \rightarrow H(N)$  состоит просто в вырезании из матрицы  $(N+1) \times (N+1)$  левого верхнего блока размером  $N \times N$ . Таким образом, имеем следующие проекции:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & U(N) & \longleftarrow & U(N+1) & \longleftarrow & \dots \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & H(N) & \longleftarrow & H(N+1) & \longleftarrow & \dots \end{array} \quad (13.3)$$

(вертикальные стрелки отвечают преобразованию Кэли).

Мера Хаара на  $U(N)$  при преобразовании Кэли переходит в меру на  $H(N)$  с плотностью

$$\text{Const} \cdot \det(1 + X^2)^{-N} \quad (13.4)$$

относительно меры Лебега на  $H(N)$  (см. также предыдущую лекцию). Оказывается, что эти меры на  $H(N)$  согласованы с проекциями  $H(N+1) \rightarrow H(N)$ . Кроме того, можно даже рассматривать более общие меры Хуа–Пикрелла, см. предыдущую лекцию.

В результате проективного предела (из согласованности) получается вероятностная мера на  $H = \varprojlim H(N)$  — пространстве всех эрмитовых матриц.

Двустороннее действие  $U(N) \times U(N)$  на  $U(N)$  с помощью преобразования Кэли переносится на  $H(N)$ .<sup>56</sup> Меры (13.4) являются инвариантными относительно этого действия. Кроме того, это действие можно продолжить до действия группы  $G = U(\infty) \times U(\infty)$ ,

$$G \times H \rightarrow H.$$

Построенная вероятностная мера на  $H$  инвариантна относительно этого действия.

С помощью преобразования Кэли строятся проекции  $U(N+1) \rightarrow U(N)$ , которые обладают некоторыми другими хорошими свойствами. Проективный предел относительно данных проекций  $\mathfrak{U} = \varprojlim U(N)$  является  $G$ -пространством, и на нем существует  $G$ -инвариантная вероятностная мера, которая получается из мер Хаара на  $U(N)$ .

### 13.4 $G$ -квазиинвариантные меры на $\mathfrak{U}$ и $H$

Отметим, что мы построили для  $U(\infty)$  аналог вероятностной меры Хаара на компактной группе. Также в первой части лекций [Оль09] были

<sup>56</sup>Получается действие  $U(N) \times U(N)$  на  $H(N)$  некоторыми дробно-линейными преобразованиями с точностью до множеств меры нуль.

описаны неприводимые характеры  $U(\infty)$ . С точки зрения представлений, каждый такой характер отвечает неприводимому сферическому представлению пары  $(G, K)$ , где  $G = U(\infty) \times U(\infty)$  и  $K = \text{diag} U(\infty) \subset G$ . Теперь перейдем к обобщению теоремы Петера–Вейля, которую следует понимать в смысле (13.2). При этом каждый объект  $\pi \otimes \bar{\pi}$  отвечает на самом деле неприводимому сферическому представлению.

Оказывается, для решения этой задачи ее следует сначала обобщить. А именно, следует включить когерентные семейства  $G(N)$ -инвариантных мер на  $H(N)$  или  $U(N)$  (для случая  $U(N)$  это меры Хаара, которые согласованы относительно проекций (13.3)) в семейства мер, зависящих от параметра. На  $H(N)$  данную роль играют меры Хуа–Пикрелла, построенные в предыдущей лекции. Эти меры на  $H(N)$  согласованы относительно проекций и имеют следующую плотность относительно меры Лебега:

$$\text{Const} \cdot \det((1 + iX)^{-s-N}) \det((1 - iX)^{-\bar{s}-N}), \quad (13.5)$$

где  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(s) > -\frac{1}{2}$  — параметр.<sup>57</sup>

Данные меры приводят к семейству вероятностных мер на  $H$  и (с помощью преобразования Кэли) на  $\mathfrak{U}$ , зависящих от  $s \in \mathbb{C}$ . Данные меры уже не будут инвариантными, они будут квазиинвариантными. С помощью квазиинвариантных мер также можно строить представления, об этом — в следующем подразделе.

### 13.5 Квазиинвариантные меры и представления

Пусть  $G$  — группа, которая (справа) действует на пространстве  $X$ :

$$X \times G \rightarrow X, \quad (x, g) \mapsto x \cdot g.$$

Пусть  $P$  — мера на  $X$ , не обязательно конечная. Для каждого  $g \in G$  можно определить образ меры  $P$  при умножении на элемент  $g$ , обозначим эту меру через  $P^g$ .

**Определение 13.1.** Мера  $P$  на  $X$  называется квазиинвариантной, если для всех  $g \in G$  меры  $P$  и  $P^g$  эквивалентны (то есть, отличаются друг от друга умножением на функцию).

Предположим, что мера  $P$  на  $X$  является  $G$ -инвариантной. Тогда определено унитарное представление  $T$  группы  $G$  в пространстве  $L^2(X, P)$ :

$$g \mapsto T(g), \quad (T(g)f)(x) = f(x \cdot g), \quad f \in L^2(X, P).$$

Ясно, что

$$(T(g)f, T(g)f)_{L^2(X, P)} = (f, f)_{L^2(X, P)},$$

то есть, представление действительно унитарно.

<sup>57</sup>Условие  $\text{Re}(s) > -\frac{1}{2}$  накладывается для того, чтобы меру было можно сделать вероятностной.

Теперь пусть  $P$  — квазиинвариантная мера. Тогда представление  $G$  в  $L^2(X, P)$  также можно построить, однако, для этого придется модифицировать картину, описанную выше. А именно, представление  $g \mapsto T(g)$  следует определить так:

$$(T(g)f)(x) = f(x \cdot g)c(x, g).$$

Чтобы это было представлением, функция  $c: X \times G \rightarrow \mathbb{C}$  должна быть коциклом, то есть,

$$c(x, g_1 g_2) = c(x, g_1)c(x \cdot g_1, g_2), \quad x \in X, \quad g_1, g_2 \in G.$$

Чтобы представление было унитарным, необходимо потребовать, чтобы

$$|c(x, g)|^2 = \frac{P(dx \cdot g)}{P(dx)},$$

где в правой части стоит производная Радона–Никодима меры  $P^g$  по мере  $P$ .<sup>58</sup>

Один из возможных вариантов выбора функции  $c(x, g)$  — это просто

$$c(x, g) := \left\{ \frac{P(dx \cdot g)}{P(dx)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Однако, для унитарности представления  $T$  необходимо лишь условие на  $|c(x, g)|^2$ , поэтому можно обогатить конструкцию, взяв

$$c(x, g) := \left\{ \frac{P(dx \cdot g)}{P(dx)} \right\}^{\frac{1}{2} + i\xi}, \quad (13.6)$$

где  $\xi \in \mathbb{R}$  — параметр.

Таким образом, по квазиинвариантной мере  $P$  можно построить целое семейство представлений  $G$  в  $L^2(X, P)$ .

### 13.6 Обобщенные регулярные представления дубля бесконечномерной унитарной группы и их сжатие

Пусть  $G = U(\infty) \times U(\infty)$  и  $K = \text{diag } U(\infty) \subset G$ . Каждое из пространств  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{H}$  является  $G$ -пространством, они связаны преобразованием Кэли. На  $\mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{U}$  из мер (13.5) получаются семейства вероятностных мер, зависящих от параметра  $s \in \mathbb{C}$ . На  $\mathfrak{H}$  обозначим эти меры через  $P_s$ . Замечательно, что эти меры являются квазиинвариантными относительно действия группы  $G$ . Добавляя в определение представления второй параметр, как в (13.6), получим (после переобозначения параметров) семейство представлений  $T_{z,w}$

<sup>58</sup>По определению квазиинвариантности, эти меры эквивалентны, то есть, такая ненулевая (на носителе  $P$ ) функция существует. Производную  $\frac{P(dx \cdot g)}{P(dx)}$  можно неформально воспринимать как отношение бесконечно малого объема вокруг точки  $x \cdot g$  к бесконечно малому объему вокруг точки  $x$ .

группы  $G$  в  $L^2(H, P_s)$ . Здесь  $z, w \in \mathbb{C}$  — комплексные параметры, и  $z + \bar{w} = s$ . Представления  $T_{z,w}$  и следует рассматривать как аналоги бирегулярного представления  $U(N) \times U(N)$  в  $L^2$  по мере Хаара на  $U(N)$ . Задача гармонического анализа состоит в том, чтобы получить разложение представлений  $T_{z,w}$  на неприводимые.

Перейдем к сжатию. Меры  $P_s$  ( $s \in \mathbb{C}$ ) на  $H$  также имеют представленийческий смысл. А именно, можно рассмотреть сферические представления сжатой группы  $\mathring{G} = U(\infty) \times H(\infty)$  (сферические относительно  $U(\infty) \subset \mathring{G}$ ). Неприводимые сферические представления здесь — это в точности эргодические вероятностные меры на  $H$  относительно действия  $U(\infty)$  сопряжениями. Данные меры мы обсуждали в нескольких предыдущих лекциях. Эргодические меры на  $H$ , истолкованные как сферические функции, получаются из сферических функций представлений  $(G, K)$  путем сжатия.

### 13.7 Задача гармонического анализа

Перейдем к задаче гармонического анализа для представлений  $T_{z,w}$ . Отметим, что есть также сжатая версия этой задачи, о которой скажем позже.

Дуальное пространство к группе  $U(\infty)$ , то есть, пространство параметров неприводимых сферических представлений  $(G, K)$ , было описано в первой части лекций [Оль09]. Оно обозначается

$$\Omega \subset \mathbb{R}^{4\cdot\infty+2}$$

и состоит из всех наборов  $\omega = (\alpha^\pm, \beta^\pm, \delta^\pm)$  с условиями

$$\begin{aligned} \alpha^\pm &= (\alpha_1^\pm \geq \alpha_2^\pm \geq \dots \geq 0); \\ \beta^\pm &= (\beta_1^\pm \geq \beta_2^\pm \geq \dots \geq 0); \\ \delta^\pm &\geq 0, \end{aligned}$$

и

$$\sum_i \alpha_i^\pm + \sum_i \beta_i^\pm < \delta^\pm, \quad \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1.$$

Каждой точке  $\omega \in \Omega$  соответствует неприводимое сферическое представление  $T^{(\omega)}$  пары  $(G, K)$ .

Представление  $T_{z,w}$ , зависящее от двух параметров, можно разложить на неприводимые, это аналог теоремы Петера–Вейля:

$$T_{z,w} = \int_{\Omega} T^{(\omega)} \nu_{z,w}(d\omega).$$

Здесь  $\nu_{z,w}$  — вероятностная мера, которая определяется неоднозначно. Ее можно определить однозначно, если договориться, что выделенный вектор в пространстве  $L^2(H, P_s)$  представления  $T_{z,w}$  пары  $(G, K)$  — это единичная функция.<sup>59</sup> При  $(z, w)$  в общем положении этот вектор является циклическим.

<sup>59</sup>Если не фиксировать выделенный вектор, то представление  $T_{z,w}$  однозначно определяет лишь класс мер  $\nu_{z,w}$  с точностью до эквивалентности.

Перейдем на уровень сжатия. Множество параметров эргодических мер на  $H$  обозначим через  $\mathring{\Omega}$ . Оно состоит из всех точек  $\mathring{\omega} = (\alpha, \gamma_1, \delta)$ , где  $\alpha = (\alpha_k \in \mathbb{R})$  — последовательность,  $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\delta \geq 0$  и  $\sum \alpha_i^2 \leq \delta$ . Меры Хуа-Пикрелла  $P_s$  на  $H$  являются инвариантами относительно действия  $U(\infty)$  сопряжениями, и поэтому однозначно разлагаются по эргодическим мерам. То есть, существуют вероятностные меры  $\mathring{\nu}$  на  $\mathring{\Omega}$ , такие, что  $(P^{\mathring{\omega}})$  — эргодическая мера, отвечающая  $\mathring{\omega} \in \mathring{\Omega}$

$$P_s = \int_{\mathring{\Omega}} P^{\mathring{\omega}} \mathring{\nu}_s (d\mathring{\omega}).$$

Здесь меры  $\mathring{\nu}_s$  определяются совсем однозначно.

### 13.8 Описание мер $\nu_{z,w}$ и $\mathring{\nu}_s$ с помощью детерминантных процессов

Меры  $\nu_{z,w}$  и  $\mathring{\nu}_s$  — это меры на бесконечномерных пространствах  $\Omega$  и  $\mathring{\Omega}$ , соответственно. Можно ставить вопрос, например, о поведении координаты  $\alpha_1^+$ , или, более общо, о совместном распределении некоторого набора координат. Однако, данные вопросы не имеют простого ответа (в случае  $\alpha_1^+$ , например, распределение задается с помощью решения некоторого трансцендентного уравнения). Поэтому требуется другое понимание мер  $\nu_{z,w}$  и  $\mathring{\nu}_s$ . А именно, данные меры интерпретируются с помощью точечных процессов.

Начнем с меры  $\nu_{z,w}$ . Она сосредоточена на пространстве

$$\Omega = \{(\alpha^\pm, \beta^\pm, \delta^\pm)\}.$$

Забудем про  $\delta^\pm$  и будем описывать лишь поведение координат  $\alpha^\pm$  и  $\beta^\pm$ . При этом мы получим какую-то проекцию меры  $\nu_{z,w}$ . Рассмотрим проколотую прямую  $\mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{1}{2}\}$ . Отложим на ней:

- Точки  $\alpha_1^+, \alpha_2^+, \dots$  направо от точки  $+\frac{1}{2}$ . Таким образом, в конфигурацию попадут точки  $\{\frac{1}{2} + \alpha_1^+, \frac{1}{2} + \alpha_2^+, \dots\}$ .
- Аналогично, точки  $\alpha_1^-, \alpha_2^-, \dots$  налево от точки  $-\frac{1}{2}$ .
- От точки  $+\frac{1}{2}$  налево отложим точки  $\beta_1^+, \beta_2^+, \dots$ .
- От точки  $-\frac{1}{2}$  направо отложим точки  $\beta_1^-, \beta_2^-, \dots$ . В силу условия  $\beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1$ , в интервале  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  не возникнет совпадающих точек.

Таким образом, получим локально конечную точечную конфигурацию на проколотой прямой  $\mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{1}{2}\}$ . Восстановить  $\alpha^\pm$  по точечной конфигурации можно, а  $\beta^\pm$  — нет, так как неясно, какие из точек в интервале  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  отнести к  $\beta^+$ , а какие — к  $\beta^-$ .

Мера  $\nu_{z,w}$  на  $\Omega$  проектируется в меру на конфигурациях на  $\mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{1}{2}\}$ . Таким образом, возникает случайный точечный процесс. Оказывается, он является детерминантным, и его ядро можно выразить через гауссовскую гипергеометрическую функцию.

В сжатии мера  $\hat{\nu}_s$  лежит на  $\hat{\Omega} = \{(\alpha, \gamma_1, \delta)\}$ . Забудем про  $\gamma_1$  и  $\delta$ , и расположим точки  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) на проколоте прямой  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Они будут сгущаться к нулю, а других точек сгущения не будет. Мера  $\hat{\nu}_s$  определяет точечный процесс на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , который также является детерминантным. Его ядро можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию.

Можно показать, что сжатие здесь работает и на уровне точечных конфигураций. При этом  $\beta^\pm$  исчезают, а два прокола  $\pm \frac{1}{2}$  в случае с  $\Omega$  превращаются в один прокол в  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Более общие результаты, включающие в детерминантные процессы динамику, были получены в [BF08]. Динамика здесь не имеет (пока?) представленного смысла. Динамические модели с детерминантными процессами естественно возникают в задачах теории случайных матриц.

### 13.9 Дизъюнктность

Представления  $T_{z,w}$  пары  $(G, K)$  обобщают регулярные представления  $R_N$  пары  $(U(N) \times U(N), \text{diag } U(N))$  в следующем смысле. Существует очень много вложений представления  $R_N$  в  $R_{N+1}$ . Для всех допустимых значений параметров  $z, w \in \mathbb{C}$  можно определить цепочку вложений регулярных представлений

$$\dots \hookrightarrow R_N \hookrightarrow R_{N+1} \hookrightarrow \dots$$

которая зависит от  $z, w$ . Данные вложения приводят к представлению  $T_{z,w}$ .

Возникает вопрос, для чего требуется рассматривать целое семейство  $T_{z,w}$  обобщенных регулярных представлений пары  $(G, K)$ ? Почему не рассматривать только одно, скажем, при  $z = w = 0$ ?

Оказывается, при различных  $(z, w)$  в общем положении представления  $T_{z,w}$  дизъюнкты, то есть, соответствующие им меры  $\nu_{z,w}$  на  $\Omega$  дизъюнкты (то есть, носители мер не пересекаются). Другими словами, представления  $T_{z,w}$  являются «разными». Именно поэтому требуется рассматривать целое семейство обобщенных регулярных представлений.

Доказательство дизъюнктности представлений  $T_{z,w}$  требует усилий и не извлекается из вида корреляционных ядер для мер  $\nu_{z,w}$  на  $\Omega$  (см. выше). В этом отличие детерминантных процессов от гауссовских мер. Сходство состоит в том, что оба класса мер управляются функцией двух переменных (или, более точно, корреляционным оператором). При этом в случае гауссовских мер вопрос о дизъюнктности решается просто и ответ можно сформулировать в терминах корреляционного оператора. Для детерминантных процессов такой ответ неизвестен.

## Список литературы

- [BDJ99] J. Baik, P. Deift, and K. Johansson, *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations*, Journal of the American Mathematical Society **12** (1999), no. 4, 1119–1178.
- [BDJ00] ———, *On the distribution of the length of the second row of a Young diagram under Plancherel measure*, Geometric And Functional Analysis **10** (2000), no. 4, 702–731, arXiv:math/9901118v1 [math.CO].
- [BF08] A. Borodin and P. Ferrari, *Anisotropic growth of random surfaces in 2+1 dimensions: fluctuations and covariance structure*, arXiv:0804.3035v2 [math-ph].
- [Bia01] P. Biane, *Approximate factorization and concentration for characters of symmetric groups*, International Mathematics Research Notices **2001** (2001), no. 4, 179, arXiv:math/0006111v2 [math.RT].
- [BO01] A. Borodin and G. Olshanski, *Infinite random matrices and ergodic measures*, Communications in Mathematical Physics **223** (2001), no. 1, 87–123.
- [BO07] ———, *Asymptotics of Plancherel-type random partitions*, Journal of Algebra **313** (2007), no. 1, 40–60, arXiv:math/0610240v2 [math.PR].
- [BOO00] A. Borodin, A. Okounkov, and G. Olshanski, *Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups*, Journal of the American Mathematical Society **13** (2000), no. 3, 481–515, arXiv:math/9905032v2 [math.CO].
- [Bor09] A. Borodin, *Determinantal point processes*, arXiv:0911.1153v1 [math.PR].
- [Dei00] P. Deift, *Integrable systems and combinatorial theory*, Notices Amer. Math. Soc **47** (2000), no. 6, 631–640.
- [Dys62] Freeman J. Dyson, *Трусы стамбу в J. Math. Phys.*
- [Joh01] K. Johansson, *Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure*, Annals of Mathematics **153** (2001), no. 1, 259–296, arXiv:math/9906120v3 [math.CO].
- [Kar68] S. Karlin, *Total positivity*, Stanford University Press Stanford, CA, 1968.
- [Kra99] C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus*, arXiv:math/9902004v3 [math.CO].

- [LR04] V. Lomonosov and P. Rosenthal, *The simplest proof of Burnside's theorem on matrix algebras*, Linear Algebra and its Applications **383** (2004), 45–48.
- [LS77] BF Logan and L.A. Shepp, *A variational problem for random Young tableaux*, Advances in Math **26** (1977), no. 2, 206–222.
- [Mon73] HL Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Proc. Symp. Pure Math, vol. 24, 1973, pp. 181–193.
- [Odl87] AM Odlyzko, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, Mathematics of Computation (1987), 273–308.
- [Ols08] G. Olshanski, *Difference operators and determinantal point processes*, Functional Analysis and Its Applications **42** (2008), no. 4, 317–329, arXiv:0810.3751v1 [math.PR].
- [OV96] G. Olshanski and A. Vershik, *Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices*, Contemporary Mathematical Physics. F.A. Berezin's memorial volume. American Mathematical Society Translations, (Advances in the Mathematical Sciences — 31), 2, vol. 175, 1996, arXiv:math/9601215v1 [math.RT], pp. 137–175.
- [Pic87] D. Pickrell, *Measures on infinite dimensional Grassmann manifolds*, Journal of Functional Analysis **70** (1987), no. 2, 323–356.
- [Pic91] ———, *Mackey analysis of infinite classical motion groups*, Pacific J. Math **150** (1991), no. 1, 139–166.
- [Sag01] B.E. Sagan, *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, Springer Verlag, 2001.
- [Sim98] B. Simon, *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator*, Advances in Mathematics **137** (1998), no. 1, 82–203.
- [Sos00] A. Soshnikov, *Determinantal random point fields*, Russian Mathematical Surveys **55** (2000), no. 5, 923–975, arXiv:math/0002099v4 [math.PR].
- [AG77] Н.И. Ахиезер and И.М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*.
- [Ахи61] Н.И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*.
- [БЭ66] Г. Бейтмен and А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, 1966.

- [ВК77] А.М. Вершик and С.В. Керов, *Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга*, ДАН СССР **233** (1977), 1024–1027.
- [Вей07] Г. Вейль, *Классические группы. Их инварианты и представления*, КомКнига М., 2007.
- [Вин01] Э.Б. Винберг, *Курс алгебры*, М.: Факториал пресс (2001).
- [Кер86] С. В. Керов, *Distribution of symmetry types of high rank tensors*, Записки научных семинаров ЛОМИ **155** (1986), 181–186, Англ. перевод: J. Sov. Math., 41:2 (1988), 995–999.
- [Мак84] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, М: Мир, 1984.
- [НСУ85] А.Ф. Никифоров, С.К. Суслов, and В.Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, 1985.
- [Оль89] Г. Ольшанский, *Унитарные представления бесконечномерных классических групп. Докторская диссертация*, доступно по ссылке [http://www.iitp.ru/upload/userpage/52/Olshanski\\_thesis.pdf](http://www.iitp.ru/upload/userpage/52/Olshanski_thesis.pdf).
- [Оль09] Г. Ольшанский, *Асимптотическая теория представлений I. Записки лекций.*, Доступно по адресу <http://www.iitp.ru/en/userpages/88/>.
- [РС77] М. Рид and Б. Саймон, *Современные методы математической физики. Т. 1*, 1977.
- [Фул06] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, М.: МЦНМО (2006).
- [Хуа59] Ло-Кен Хуа, *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях*, М.: Изд-во иностр. лит (1959).