Una breve introducción a los espacios uniformes

Bruno Stonek
bruno@stonek.com

15 de noviembre de 2010

Índice

1. Introducción

Esta introducción es formalmente innecesaria. Este artículo podría empezar directamente en la sección siguiente, y estaría “matemáticamente completo”. Sin embargo, empezar con largas definiciones salidas de la nada es una manera artificial y desagradable de introducir esta teoría (y cualquier otra, opina humildemente el autor), pudiendo lograr un espontáneo rechazo en el lector.

Para evitar esto empezaremos con una afirmación harto informal.

Los espacios uniformes son algo que está entre los espacios topológicos y los espacios métricos.

Esto quiere decir que la estructura que pasaremos a desarrollar *generaliza* a los espacios métricos, pero *no tanto* como los espacios topológicos. Al tener menos generalidad podremos mantener ciertos resultados métricos en este contexto más general (pero perderemos otros resultados). Las propiedades que resistan el ataque de esta generalización serán las propiedades *uniformes*.

Demos evidencia de que los espacios uniformes surgen de observaciones métrico-topológicas para nada estrafalarias.

- En los espacios métricos podemos decir *exactamente* a qué distancia están dos puntos x e y. En los espacios topológicos podemos decir qué significa que un punto x esté *arbitrariamente cerca* de un punto y. Podemos pensar en una noción de distancia que esté a medio camino entre ambas, una que nos permita por ejemplo decir que un punto x está más cerca de a que y lo está de b.

- Recordemos lo que significa ser una propiedad *topológica* o *métrica*:

$$\text{Propiedad topológica} \iff \text{es invariante por homeomorfismos}$$
$$\text{Propiedad métrica} \iff \text{es invariante por isometrías}$$

  Consideremos la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{x}$ y la sucesión de Cauchy $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. f es un homeomorfismo, sin embargo transforma una sucesión de Cauchy en una que no lo es. Por lo tanto "ser de Cauchy" no es una propiedad topológica. Obviamente es una propiedad métrica (es invariante por isometrías). Pero basta con algo más débil que ser una isometría: recordemos que si $f : M \to N$ es una función uniformemente continua entre espacios métricos, entonces lleva sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. Por lo tanto si f es uniformemente continua, invertible y de inversa uniformemente continua (lo que a veces se llama *homeomorfismo uniforme*) entonces M es completo si y sólo si N lo es.

  Concluimos que "ser completo" es invariante por homeomorfismos uniformes. Y podemos pensar que a lo mejor existe un contexto más general en el que podamos hablar de funciones uniformemente continuas, sin necesidad de tener una métrica, es decir: una nueva estructura, que llamaremos estructura *uniforme*, que nos permita decir:

$$\text{Propiedad uniforme} \iff \text{es invariante por homeomorfismos uniformes}$$

- En el teorema "toda función continua en un espacio métrico compacto es uniformemente continua", partimos de una premisa topológica (una función continua en un compacto), usamos que el espacio es métrico y concluimos que la función es uniformemente continua, una propiedad que tachamos de *uniforme* y que es más general que ser métrica. Siguiendo con nuestra ambición del punto anterior, podemos esperar que este teorema se mantenga cuando quitemos la estructura métrica y la reemplacemos por una uniforme.

- Podemos caracterizar los espacios métricos mediante sucesiones. Ya sabemos que las sucesiones son inadecuadas en espacios topológicos en general, precisando de un concepto de convergencia más potente, el de las redes (por ejemplo). Ahora bien, en espacios métricos también hablamos de sucesiones de Cauchy (concepto que no tiene sentido en espacios topológicos). ¿Por qué no hablar de "redes de Cauchy"? Este concepto no tiene sentido en espacios topológicos y es inútil en espacios métricos: buscamos entonces la estructura que las redes de Cauchy caractericen completamente (estructura que será por ende mantenida por funciones uniformemente continuas)[1].

[1]En este momento resulta imposible no hablar en un lenguaje categórico. La estructura que buscamos es la estructura que tenga naturalmente a las funciones uniformemente continuas como morfismos. Si bien podemos

Esperemos que esto sea suficiente motivación para la creación de una estructura diferente. Terminamos con la siguiente observación: nuestra estructura tendrá como protagonistas a los *pares de puntos*. En efecto, es para pares de puntos que podremos darle un sentido al primer ítem de la lista anterior; es para pares de puntos que podemos pretender generalizar la noción de "ser de Cauchy" así como de ser una función $f : M \to N$ uniformemente continua: en vez de tener

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in M \quad d(x,y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

pasaremos a tener lo siguiente, donde $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(M \times M)$ y $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(N \times N)$ son colecciones distinguidas:

$$\forall U \in \mathcal{U} \, \exists V \in \mathcal{V} : \forall (x,y) \in M \times M \quad (x,y) \in U \implies (f(x), f(y)) \in V$$

observando que, a efectos de la continuidad uniforme, lo único que importa de la métrica (y lo que pretendemos abstraer) es que se puede aplicar uniformemente a pares de puntos sin importar donde estén (lo cual no ocurre en espacios topológicos donde los entornos de un punto dependen de *donde esté* el punto).

2. Los espacios uniformes

[2] Sean X, Y conjuntos. Recordemos que una *relación* U en $X \times Y$ es un subconjunto $U \subset X \times Y$.

- Dada una relación U en $X \times Y$, definimos $U^{-1} := \{(x,y) \in Y \times X : (y,x) \in U\}$.
- Dadas U, V relaciones en $X \times X$, definimos

  $$U \circ V := \{(x,z) \in X \times X : \exists y \in X \text{ tal que } (x,y) \in V \, \wedge \, (y,z) \in U\}.$$

  [3]
- Dada una relación U en $X \times Y$, para todo $x \in X$ definimos $U[x] := \{y \in Y : (x,y) \in U\}$.
- Dado un conjunto X definimos su *diagonal* como el conjunto $\Delta(X) := \{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X$. Cuando no haya lugar a confusión la notaremos simplemente por Δ.

Observar y tener en mente que en un espacio métrico, dos puntos x e y están cerca si y sólo si (x,y) está cerca de Δ.

---

pensar que los objetos "espacios métricos" admiten como morfismos las contracciones débiles (dando lugar a la categoría usual **Met**) y también las funciones uniformemente continuas (dando lugar a $\mathbf{Met_u}$), como estas dos categorías obviamente no son la misma (una contracción débil es una función uniformemente continua pero no al revés), se trata de hallar los objetos que en algún sentido sean el hogar natural para las funciones uniformemente continuas como morfismos. Ver [Adá].

[2] Los espacios uniformes fueron introducidos por André Weil en su artículo *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Actualités Scientifiques et Industrielles, Vol. 551, Hermann, Éditeurs, Paris (1937), Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Strasbourg.

[3] Esto es un caso particular de *composición de relaciones*: dada U relación en $Y \times Z$ y V relación en $X \times Y$, análogamente se define $U \circ V$. No lo haremos porque a nuestros efectos de espacios uniformes no nos interesa.

Definición. [4]Sea X un conjunto, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X \times X)$, $\mathcal{U} \neq \emptyset$ tal que:

(a) $\forall U \in \mathcal{U} \;\; U \supset \Delta$.

(b) $U \in \mathcal{U} \implies U^{-1} \in \mathcal{U}$.

(c) $U \in \mathcal{U} \implies \exists V \in \mathcal{U} : V \circ V \subset U$.

(d) $U, V \in \mathcal{U} \implies U \cap V \in \mathcal{U}$.

(e) $\forall U \in \mathcal{U} \;\; U \subset V \subset X \times X \implies V \in \mathcal{U}$.

Diremos que $\mathcal{U}$ es una *uniformidad* para X, y que el par $(X,\mathcal{U})$ es un *espacio uniforme*. Los elementos de $\mathcal{U}$ se dirán *vecindades*. Diremos que x es U-*cercano* de y si $(x, y) \in U \in \mathcal{U}$. Si $A \times A \subset U \in \mathcal{U}$ diremos que A es U-*pequeño*.

Podemos interpretar la definición de la siguiente manera:

(a) Para cualquier vecindad U todo punto es U-cercano[5] consigo mismo. En otras palabras, ser U-cercano es reflexivo. (Esto generaliza directamente la propiedad $d(x, x) = 0$ para cualquier x siendo d una métrica).

(b) Si x es U-cercano de y entonces y es U^{-1}-cercano de x (la propiedad nos garantiza que efectivamente $U^{-1} \in \mathcal{U}$). En otras palabras, ser U-cercano es simétrico. (Esto generaliza directamente la propiedad $d(x, y) = d(y, x)$ para cualquier x, y siendo d una métrica).

(c) Para toda vecindad U hay una vecindad V con la mitad de tamaño. (Esto es un vestigio de la desigualdad triangular, que es imposible de traducir directamente en términos de uniformidades[6]: podemos pensarla también como “dada una r-bola hay una $\frac{r}{2}$-bola”).

(d) Si podemos hablar de U-cercanía y de V-cercanía entonces podemos hablar de $(U \cap V)$-cercanía (i.e. de puntos que son U-cercanos y V-cercanos a la vez).

(e) Si V contiene una vecindad, entonces es una vecindad. (Es análogo a lo que pasa con los entornos: si V contiene un entorno de x, entonces es un entorno de x).

Ejemplo 2.1. Dado cualquier conjunto X podemos dotarlo de diferentes uniformidades. Las *uniformidades triviales* son: $\mathcal{U} = \{X \times X\}$ (la más gruesa, que llamaremos *uniformidad indiscreta*) y $\mathcal{U} = \{U \subset X \times X : U \supset \Delta\}$ (la más fina, que llamaremos *uniformidad discreta*).

El siguiente ejemplo junto con la figura 1 son de ayuda para empezar a visualizar las uniformidades:

Ejemplo 2.2. La *uniformidad usual* para $\mathbb{R}$ es

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists r > 0 \text{ tal que } |x - y| < r \implies (x, y) \in U\}$$

(los conjuntos que contienen alguna banda diagonal de diámetro positivo). En este ejemplo es bien claro por qué decíamos que el ítem (c) de la definición de espacio uniforme puede verse

[4]Los espacios uniformes presentan *criptomorfismo* (nomenclatura debida a Garrett Birkhoff, 1967, en su libro *Lattice Theory*: una estructura matemática presenta *criptomorfismo* si admite diversas pero equivalentes axiomatizaciones). En efecto, hay al menos dos definiciones equivalentes más de los espacios uniformes: a través de sistemas de pseudométricas, o a través de cubrimientos uniformes. Ver [Wil], por ejemplo.

[5]Queda expresamente difuso el significado de “ser U-cercano” para no oscurecer lo que está más claro que el agua.

[6]Informalmente se trata sencillamente del hecho que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ es una relación que “desarma” el par (x, z) en dos pares (x, y) e (y, z), algo que no podemos hacer con vecindades.

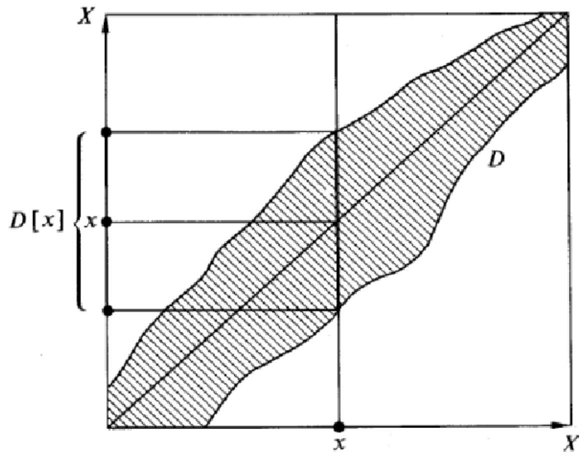

Figura 1: D es una uniformidad para X (imagen de [Wil])

como vestigio de la desigualdad triangular, y como "para toda r-bola existe una $\frac{r}{2}$-bola". En efecto, dado U_r, la vecindad V del ítem (c) es por ejemplo $U_{\frac{r}{2}}$. Conviene observar esto en detalle y ver cómo entra en juego la desigualdad triangular.

Definición. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Un subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ es una *base* para $\mathcal{U}$ si y sólo si toda vecindad contiene un elemento de $\mathcal{B}$; en otras palabras, si [7]

$$\forall U \in \mathcal{U} \;\; \exists B \in \mathcal{B} : B \subset U$$

Ejemplo 2.3. La uniformidad discreta en X tiene como base al conjunto $\mathcal{B} = \{\Delta\}$.

Ejemplo 2.4. La uniformidad usual en $\mathbb{R}$ tiene como base al conjunto $\mathcal{B} = \{U_\epsilon : \epsilon > 0\}$, donde

$$U_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| < \epsilon\}$$

Definición. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Decimos que $U \in \mathcal{U}$ es una *vecindad simétrica* si $U^{-1} = U$.

Observación 2.5. Dado $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme, las vecindades simétricas son una base de $\mathcal{U}$: en efecto, dado $U \in \mathcal{U}$, se tiene que U^{-1} pertenece a $\mathcal{U}$, luego $U \cap U^{-1} \in \mathcal{U}$. Tenemos entonces $U \supset U \cap U^{-1}$, que es una vecindad simétrica.

La observación anterior nos dice que las vecindades simétricas (geométricamente: aquellas que son simétricas respecto de la diagonal Δ) son las "vecindades fundamentales" de cualquier uniformidad: son a un espacio uniforme lo que las bolas son a un espacio métrico.

A continuación damos un criterio necesario y suficiente para ser base de una uniformidad. La necesidad es trivial, lo interesante es la suficiencia: dando un conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ con ciertas características, construimos una y sólo una uniformidad cuyas vecindades son los subconjuntos de $X \times X$ que contienen a algún elemento de $\mathcal{B}$.

Proposición 1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ un subconjunto no vacío. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para alguna uniformidad en X si y sólo si:*

(A) $\forall B \in \mathcal{B} \;\; B \supset \Delta$,

[7] Comparar con la definición de *base de una topología*: si τ es una topología para X, entonces $\mathcal{B} \subset \tau$ es una base para τ si $\forall U \in \tau \;\; \exists B \in \mathcal{B} : B \subset U$.

(B) $\forall B \in \mathcal{B}$ $B^{-1} \supset B'$ *para cierto* $B' \in \mathcal{B}$,

(C) $\forall B \in \mathcal{B}$ $B \supset B' \circ B'$ *para cierto* $B' \in \mathcal{B}$,

(D) $\forall B, B' \in \mathcal{B}$ $B \cap B' \supset B''$ *para cierto* $B'' \in \mathcal{B}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ donde $\mathcal{U}$ es una uniformidad entonces aplicando la definición de uniformidad: $\mathcal{B}$ satisface (A). Satisface (B) con $B' = B^{-1}$. Satisface (C): $B \supset V \circ V$ para cierto $V \in \mathcal{U}$ por ser $\mathcal{U}$ uniformidad. Por ser $\mathcal{B}$ base, $V \circ V \supset B'$ para cierto $B' \in \mathcal{B}$, entonces $B \supset B' \circ B'$. Satisface (D) con $B'' = B \cap B'$.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{U} = \{U \subset X \times X : U \supset B \text{ para cierto } B \in \mathcal{B}\}$. Si $\mathcal{U}$ es una uniformidad entonces por definición tiene a $\mathcal{B}$ como base. Verifiquemos entonces que $\mathcal{U}$ es una uniformidad: satisface (a) por definición, satisface (b): si $U \in \mathcal{U}$, entonces $U \supset B$ para cierto $B \in \mathcal{B}$. Por (B), $B^{-1} \supset B'$ para cierto $B' \in \mathcal{B}$. Tenemos entonces $U^{-1} \supset B^{-1} \supset B' \in \mathcal{B}$ luego $U^{-1} \in \mathcal{U}$. Las propiedades (c) y (d) se verifican análogamente. Se cumple (e): sea $U \in \mathcal{U}$, $U \subset V \subset X \times X$. Entonces $U \supset B$ para cierto $B \in \mathcal{B}$, luego $V \supset U \supset B \in \mathcal{B}$ de donde concluimos $V \in \mathcal{U}$. □

Ejemplo 2.6. Usemos la proposición 1 para construir una nueva uniformidad en $\mathbb{R}$. Dado $a \in \mathbb{R}$, consideramos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$U_a = \Delta \cup \{(x, y) : x > a, y > a\}$$

Es un ejercicio sencillo verificar que $\mathcal{U} = \{U_a : a \in \mathbb{R}\}$ satisface las condiciones de la proposición 1.

Definición. Sean $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$ espacios uniformes. Una función $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ es *uniformemente continua* si

$$\forall V \in \mathcal{V} \ \exists U \in \mathcal{U} : (x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V$$

Si f es uniformemente continua, biyectiva, y f^{-1} es uniformemente continua, entonces decimos que es un *homeomorfismo uniforme* (*isomorfismo uniforme*) y decimos que $(X,\mathcal{U})$ e $(Y,\mathcal{V})$ son *uniformemente homeomorfos* (*uniformemente isomorfos*).

Observación 2.7. Es claro que si $\mathcal{U}$ tiene base $\mathcal{B}$ y $\mathcal{V}$ tiene base $\mathcal{C}$, entonces f es uniformemente continua si y sólo si $\forall V \in \mathcal{C}$ $\exists U \in \mathcal{B} : (x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V$.

Ejemplo 2.8. Cualquier función de un espacio uniforme discreto a otro espacio uniforme es uniformemente continua.

Observación 2.9. La composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua, y la función identidad en un espacio uniforme es uniformemente continua. Por lo tanto, tenemos definida una categoría **Unif** cuyos objetos son los espacios uniformes y cuyos morfismos son las funciones uniformemente continuas. Es un ejercicio verificar que los isomorfismos son los homeomorfismos uniformes.

3. Relación con espacios topológicos y métricos

3.1. Relación entre los espacios topológicos y los espacios métricos

Recordemos brevemente la relación conocida entre los espacios topológicos y los espacios métricos:

Una métrica d en un conjunto X da lugar a una topología métrica τ_d, que es la que tiene como base las *bolas abiertas*

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

i.e. la que tiene como base al conjunto $\mathcal{B} = \{B_r(x) : x \in X, r > 0\}$. Recordemos que dos métricas diferentes d_1, d_2 en X pueden dar lugar a la misma topología en X. En este caso decimos que d_1 y d_2 son métricas *equivalentes*. Recordemos el siguiente resultado:

Proposición 2. *Son equivalentes:*

(I) d_1 y d_2 son métricas equivalentes,

(II) $A \subset X$ es d_1-abierto si y sólo es d_2-abierto,

(III) $\forall x \in X, r > 0\ \exists r', r'' > 0$ tal que

$$B^{d_2}_{r'}(x) \subset B^{d_1}_r(x) \text{ y } B^{d_1}_{r''}(x) \subset B^{d_2}_r(x)$$

(IV) $id : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es un homeomorfismo.

Ejemplo 3.1. Un ejemplo conocido de métricas diferentes que inducen la misma topología son las métricas d_p, $p > 0$ en $\mathbb{R}^n$: si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ entonces se define

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Cuando $p = 1$ es la "distancia del taxista"; cuando $p = 2$ es la distancia euclídea; cuando $p \to \infty$ es la distancia del supremo.

Una topología en un conjunto puede no proceder de una métrica. Cuando lo es, el espacio topológico se dice *metrizable*: la metrizabilidad constituye un gran tema de estudio de la topología general.

Ejemplo 3.2. El espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la topología de convergencia puntual no es metrizable. Una demostración de esto se encuentra en la página 248 de [Lag], donde se prueba que la topología producto en $\prod_{i \in I} X_i$ es metrizable si y sólo si I es numerable.

3.2. Relación entre los espacios uniformes y los espacios métricos

Así como una métrica induce una topología, también induce una uniformidad:

Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. La *uniformidad métrica $\mathcal{U}_d$* en X inducida por d es la que tiene como base a los conjuntos

$$U^d_\epsilon = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < \epsilon\},$$

esto es, $\mathcal{U}_d$ tiene como base al conjunto $\{U^d_\epsilon : \epsilon > 0\}$ de las bandas diagonales de diámetro positivo (es fácil verificar que este conjunto efectivamente es base de una uniformidad usando la proposición 1).

Definición. Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Decimos que es *metrizable* si existe una métrica d en X tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_d$.

Ejemplo 3.3. La uniformidad usual para $\mathbb{R}$ (ver ejemplo 2.2) es la uniformidad inducida por la métrica usual.

Ejemplo 3.4. Dos métricas diferentes pueden dar lugar a uniformidades iguales: por ejemplo, si (X,d) es un espacio métrico, entonces $(X,2d)$ también lo es, y $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_{2d}$: en efecto, para todo $\epsilon > 0$, $U^d_\epsilon = U^{2d}_{\frac{\epsilon}{2}}$ y $U^{2d}_\epsilon = U^d_{\frac{\epsilon}{2}}$, de donde $\mathcal{U}_d$ y $\mathcal{U}_{2d}$ están generadas por la misma base.

Proposición 3. *Sean (M,d), (N,d') espacios métricos. Entonces una función $f : M \to N$ es uniformemente continua en el sentido usual en espacios métricos, si y sólo es uniformemente continua como función entre espacios uniformes con las uniformidades inducidas.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, sean U^d_ϵ, $V^{d'}_\epsilon$ los conjuntos de la base de $\mathcal{U}_d$ y de $\mathcal{U}_{d'}$ como en la definición de uniformidad métrica. Entonces, usando la observación 2.7,

$$\begin{aligned} f : (M,\mathcal{U}_d) \to (N,\mathcal{U}_{d'}) \text{ es u.c.} &\iff (\forall V \in U_{d'} \ \ \exists U \in \mathcal{U}_d : (x,y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V) \\ &\iff \left(\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : (x,y) \in U^d_\delta \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V^{d'}_\epsilon\right) \\ &\iff \left(\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon\right) \\ &\iff f : (M,d) \to (N,d') \text{ es u.c.} \end{aligned}$$

□

3.3. Relación entre los espacios uniformes y los espacios topológicos

Toda uniformidad induce una topología definida mediante bases locales. Para establecerla enunciamos la siguiente

Proposición 4. [8] *Sea X un conjunto. Si para cada punto $x \in X$ existe un conjunto no vacío $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{P}(X)$ que satisface:*

(I) *$A \in \mathcal{N}_x \Rightarrow x \in A$,*

(II) *$A, B \in \mathcal{N}_x \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{N}_x$,*

(III) *$A \in \mathcal{N}_x$, $B \supset A \Rightarrow B \in \mathcal{N}_x$,*

(IV) *$\forall A \in \mathcal{N}_x \ \ \exists B \in \mathcal{N}_x : B \subset A$ y $B \in \mathcal{N}_y \ \ \forall y \in B$;*

entonces hay una única topología τ en X tal que para todo $x \in X$ el conjunto $\mathcal{N}_x$ coincide con el conjunto de entornos de x respecto de τ.

Demostración. Recordando que un conjunto es abierto en una topología si y sólo si es entorno de todos sus puntos, definimos $\tau = \{U \subset X : U \in \mathcal{N}_x \text{ para todo } x \in U\}$. La verificación de que τ es una topología que satisface lo requerido se deja como ejercicio para el lector. □

Proposición 5. *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces existe una topología $\tau_\mathcal{U}$, llamada* topología inducida *por $\mathcal{U}$ en X y dicha* topología uniforme*, tal que para todo $x \in X$ el conjunto $\mathcal{U}_x = \{U[x] : U \in \mathcal{U}\}$ es una base local de x.*

Demostración. Tenemos que verificar las cuatro condiciones de la proposición anterior.

(I) Claramente $x \in U[x]$ para todo $x \in X$, pues $U \supset \Delta$.

(II) $U[x] \cap V[x] = (U \cap V)[x]$, y $U \cap V \in \mathcal{U}$ pues $U, V \in \mathcal{U}$.

[8] Esta es otra instancia del fenómeno de *criptomorfismo* que mencionábamos en 4, esta vez en la categoría de los espacios topológicos. Podemos definir una topología especificando sus abiertos (directa o indirectamente, i.e. a través de bases o de sub-bases); sus cerrados; la convergencia de redes (clases de convergencia, ver [Kel]); mediante operadores de clausura; mediante operadores de interior; o mediante un operador de entornos, que es lo que utilizaremos a continuación. Ver [Jos] para más detalles.

(III) Si $A \supset U[x]$, entonces $A = V[x]$ para cierto V que satisface $V \supset U \in \mathcal{U}$, luego $V \in \mathcal{U}$.

(IV) Dado $U[x]$, como $U \in \mathcal{U}$ entonces existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subset U$. Entonces para cualquier $y \in V[x]$ se tiene $V[y] \subset U[x]$:

- $y \in V[x] \Rightarrow (x, y) \in V$,
- sea $z \in V[y]$, entonces $(y, z) \in V$,
- por lo tanto $(x, z) \in V \circ V \subset U$, luego $z \in U[x]$. $\square$

Observación 3.5. Se genera la misma topología si se toma como bases locales a los conjuntos $\mathcal{U}_x = \{U[x] : U \in \mathcal{B}\}$, donde $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{U}$.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Si existe una uniformidad $\mathcal{U}$ en X tal que $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$ entonces diremos que (X, τ) es un espacio topológico *uniformizable.*

Si la metrización es un tema delicado y para nada trivial, la uniformización es más sencilla. Más adelante (en el teorema 12) daremos una propiedad necesaria y suficiente para que un espacio topológico sea uniformizable, que nos proveerá con muchos ejemplos de espacios topológicos no uniformizables.

Ejemplo 3.6. Así como métricas diferentes pueden dar lugar a la misma topología, uniformidades diferentes pueden dar lugar a la misma topología. Consideremos en $\mathbb{R}$ la uniformidad discreta (que genera la topología discreta) y la uniformidad que tiene como base a los conjuntos

$$U_a = \Delta \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x > a, y > a\}$$

para cualquier $a \in \mathbb{R}$ (la del ejemplo 2.6). Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se tiene $U_a[x] = \{x\}$ siempre que $a \geq x$, entonces $\{x\}$ es una base local de x para cualquier $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto esta uniformidad (que es distinta de la discreta) genera también la topología discreta.

Proposición 6. *Sean* $(X, \mathcal{U})$, $(Y, \mathcal{V})$ *espacios uniformes. Si* $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ *es uniformemente continua, entonces* $f : (X, \tau_{\mathcal{U}}) \to (Y, \tau_{\mathcal{V}})$ *es continua. Esto es: toda función uniformemente continua es continua.*

Demostración. Sean $(X, \mathcal{U})$, $(Y, \mathcal{V})$ espacios uniformes y $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ uniformemente continua. Veamos que f es continua en todo $x \in X$. Por la definición de topología uniforme, basta ver que dado $V[f(x)]$ existe $U[x]$ tal que $f(U[x]) \subset V[f(x)]$, donde $V \in \mathcal{V}$, $U \in \mathcal{U}$.

Dado $V \in \mathcal{V}$, por continuidad uniforme existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $(x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V$. Luego $f(U[x]) \subset V[f(x)]$, pues si $y \in f(U[x])$ entonces $y = f(a)$ para cierto $a \in U[x]$, luego $(x, a) \in U$, entonces $(f(x), f(a)) = (f(x), y) \in V$, de donde $y \in V[f(x)]$. $\square$

Corolario 7. *Todo homeomorfismo uniforme es un homeomorfismo.*

Ejemplo 3.7. Un homeomorfismo puede no ser un homeomorfismo uniforme. Por ejemplo, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ es un homeomorfismo que no es uniforme: usando lo que ya conocemos de funciones uniformemente continuas en espacios métricos, si fuera un homeomorfismo uniforme debería llevar sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy, sin embargo lleva $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que no es de Cauchy.

Este ejemplo no es un ejemplo de dos espacios homeomorfos que no son uniformemente homeomorfos. Es sin duda una pregunta interesante que puede ser muy difícil de contestar:

¿podemos encontrar espacios uniformes homeomorfos que no sean uniformemente homeomorfos?[9] Sí, podemos, pero el ejemplo más sencillo que hemos encontrado utiliza el primer ordinal no numerable. Ver [Wil], ejercicio 39E.

3.4. Moviéndose entre los tres

Proposición 8. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $(X, \tau_d) = (X, \tau_{\mathcal{U}_d})$, i.e.: la topología inducida por la métrica es igual a la topología inducida por la uniformidad inducida por la métrica.*

Demostración. Basta ver que los elementos de una base de τ_d (las $B_\epsilon(x)$) están en correspondencia con los elementos de una base de $\tau_{\mathcal{U}_d}$ (los $U_\epsilon^d[x]$, en virtud de la observación 3.5):

$$U_\epsilon^d[x] = \{y : (x, y) \in U_\epsilon^d\} = \{y : d(x, y) < \epsilon\} = B_\epsilon(x) \qquad \square$$

Ahora cabe hacerse la siguiente pregunta recíproca: si (X, τ) es un espacio topológico uniformizable y metrizable (como espacio topológico), ¿es el espacio uniforme inducido $(X, \mathcal{U})$ con $\mathcal{U} = \tau_{\mathcal{U}}$ metrizable (como espacio uniforme)? La respuesta es negativa, pero es difícil construir un ejemplo con las herramientas que tenemos hasta ahora.

En términos categóricos: Tenemos tres categorías: **Met**, cuyos objetos son los espacios métricos y los morfismos las contracciones débiles; **Unif**, cuyos objetos son los espacios uniformes y los morfismos las funciones uniformemente continuas; y **Top**, cuyos objetos son los espacios topológicos y los morfismos las funciones continuas.

Proposición 9. *1. Existe un functor $F : \mathbf{Met} \to \mathbf{Unif}$ tal que $(X, d) \mapsto (X, \mathcal{U}_d)$.*

2. Existe un functor $G : \mathbf{Unif} \to \mathbf{Top}$ tal que $(X, \mathcal{U}) \mapsto (X, \tau_U)$.

3. Existe un functor $H : \mathbf{Met} \to \mathbf{Top}$ tal que $(X, d) \mapsto (X, \tau_d)$.

Demostración. Probamos el primer ítem, los dos siguientes son análogos. El mapa F está bien definido en los objetos. Falta definirlo en los morfismos: lo definimos trivialmente (al mapa f lo mandamos en "el mismo mapa") pues una contracción débil es una función uniformemente continua. Es un functor: $F(\mathrm{id}_{(X,d)}) = \mathrm{id}_{(X,\mathcal{U}_d)}$, y

$$\begin{tikzcd}
(X, d) \arrow[r, mapsto, "F"] \arrow[d, "f"'] & (X, \mathcal{U}_d) \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend left=60, "F(g\circ f)=g\circ f"] \\
(Y, d') \arrow[r, mapsto, "F"] \arrow[d, "g"'] & (Y, \mathcal{U}_{d'}) \arrow[d, "g"] \\
(Z, d'') \arrow[r, mapsto, "F"] & (Z, \mathcal{U}_{d''})
\end{tikzcd}$$

$\square$

[9] De manera análoga uno se pregunta si variedades diferenciables homeomorfas pueden no ser difeomorfas. Para dimensiones 1, 2 y 3 se puede probar que la respuesta es negativa. Para dimensiones mayores, la pregunta fue respondida afirmativamente por John Milnor recién en 1956, con la construcción de *esferas exóticas* en dimensión 7, en su artículo *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Annals of Mathematics 64 (2): 399–405 (1965).

Proposición 10. *El siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Met} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "H"] & \mathbf{Unif} \arrow[r, "G"] & \mathbf{Top}
\end{tikzcd}$$

Demostración. Es la proposición 8. □

4. Uniformidades separadoras y la condición de Hausdorff

Haciendo la analogía con las propiedades T_i de separación de los espacios topológicos, ¿cuál es la más débil de la cual podíamos esperar un análogo para espacios uniformes?

La propiedad T_1 es que dados dos puntos encuentro un entorno de cualquiera de ellos que no intersecta al otro punto: esto no tiene sentido en los espacios uniformes donde los "átomos" son pares de puntos y no puntos. Por lo tanto no podemos esperar un análogo de T_1, por ende tampoco de T_0.

En cambio, la propiedad T_2 (la condición de Hausdorff) nos dice que dados dos puntos podemos encontrar sendos entornos que no se intersectan: esta propiedad es del *par* de puntos, por lo tanto podemos esperar hallar un análogo en espacios uniformes.

Definición. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. La uniformidad $\mathcal{U}$ se dice *separadora* (y el espacio $(X,\mathcal{U})$ se dice *separado*) si la intersección de todas las vecindades es la diagonal, esto es: $\bigcap\limits_{U\in\mathcal{U}} U = \Delta$.

Observación 4.1. Para ver si una uniformidad es separadora, basta verificar que $\bigcap\limits_{U\in\mathcal{B}} U = \Delta$ donde $\mathcal{B}$ es una base para la uniformidad.

En virtud de la observación anterior, una uniformidad métrica siempre es separadora: en efecto,

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}_d} U = \bigcap_{\epsilon>0} U^d_\epsilon = \bigcap_{\epsilon>0}\{(x,y)\in X\times X : d(x,y)<\epsilon\} = \Delta$$

Proposición 11. *Un espacio uniforme* $(X,\mathcal{U})$ *está separado si y sólo si el espacio topológico* $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ *es Hausdorff.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{U}$ es separadora. Sean $x,y\in X$, $x\neq y$. Entonces $(x,y)\notin\Delta$, luego existe $U\in\mathcal{U}$ tal que $(x,y)\notin U$. Sea $V\in\mathcal{U}$ tal que $V\circ V\subset U$; recordemos (observación 2.5) que podemos suponer V vecindad simétrica. Entonces $V[x]$ y $V[y]$ son los entornos que buscamos: supongamos que existe $z\in V[x]\cap V[y]$. Tendríamos $(x,z)\in V$ e $(y,z)\in V$: como V es simétrica, entonces $(z,y)\in V$, y por lo tanto $(x,y)\in V\circ V\subset U$, absurdo.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\tau_{\mathcal{U}}$ es Hausdorff. Veamos que $\bigcap\limits_{U\in\mathcal{U}} U\subset\Delta$: si un par de puntos (x,y) no estuviera en Δ entonces serían diferentes, de donde por la propiedad de Hausdorff existen $U,V\in\mathcal{U}$ tales que $U[x]\cap V[y]=\emptyset$. Pero entonces $(x,y)\notin U\cap V\subset\bigcap\limits_{U\in\mathcal{U}} U$. □

Por lo tanto, la propiedad de *separación* para espacios uniformes es el análogo a la propiedad Hausdorff de espacios topológicos. Si quisiéramos dar un ejemplo de un espacio uniforme no separado, bastaría con hallar uno cuya topología no fuera Hausdorff... Hasta ahora no nos hemos encontrado con un ejemplo de este estilo, y de hecho en realidad esto es imposible como ya veremos en el teorema 12. Sí, estamos diciendo que en realidad toda uniformidad está separada.

5. Uniformización y metrización

5.1. Uniformización de espacios topológicos

Ya habíamos adelantado que podríamos decir exactamente qué espacios topológicos serían los uniformizables. Es el teorema que daremos a continuación. Primero recordemos una definición:

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que es *completamente regular* si dados un cerrado $A \subset X$ y un punto $x \in X$, $x \notin A$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f|_A = 1$. En este caso decimos que x y A pueden ser separados por una función continua.

Observación 5.1. Esta observación podría formar parte de la demostración del teorema que sigue, pero consideramos que es suficientemente interesante como para darla por separado. Dado cualquier espacio topológico (X, τ), le podemos dar la estructura uniforme $\mathcal{U}$ más gruesa tal que toda función continua $f : X \to [0, 1]$ (donde $[0, 1]$ tiene la uniformidad usual y su topología inducida) es uniformemente continua.

Obviamente que la topología $\tau_{\mathcal{U}}$ no tiene por qué ser la topología τ; si esto ocurriera todo espacio topológico sería uniformizable, lo cual no es cierto. Lo que sí ocurre es que $\tau_{\mathcal{U}} \subset \tau$, esto es, τ es más fina (o igual) que $\tau_{\mathcal{U}}$. Veamos esto:

Observar que una base para las vecindades de $\mathcal{U}$ consiste de intersecciones finitas de conjuntos

$$D_{f,\epsilon} = \{(a, b) \in X \times X : |f(a) - f(b)| < \epsilon\}$$

donde $f : X \to [0, 1]$ es continua y $\epsilon > 0$. Basta ver que $D_{f,\epsilon}[x]$ es abierto con la topología τ, y esto ocurre porque

$$D_{f,\epsilon}[x] = \{a \in X : |f(a) - f(x)| < \epsilon\} = f^{-1}((f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon))$$

Teorema 12. *Un espacio topológico es uniformizable si y sólo si es completamente regular.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea (X, τ) un espacio topológico. En virtud de la observación anterior basta ver que $\tau \subset \tau_{\mathcal{U}}$. Consideremos A un τ-cerrado y veamos que es un $\tau_{\mathcal{U}}$-cerrado. Sea $x \in A^c$; como X es completamente regular existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f|_A = 0$ y $f(x) = 1$. Consideremos la vecindad

$$D = D_{f,\frac{1}{2}} = \left\{(a, b) \in X \times X : |f(a) - f(b)| < \frac{1}{2}\right\}$$

Si $y \in D[x]$ entonces $(x, y) \in D$ de tal manera que $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$ y por lo tanto $|f(y)| > \frac{1}{2}$, de donde $y \notin A$. Por lo tanto la vecindad $D[x]$ no intersecta a A, por lo tanto $A = (D[x])^c$ es $\tau_{\mathcal{U}}$-cerrado.

($\Leftarrow$) El recíproco es una variante de la demostración debida a Urysohn de su lema (el lema de Urysohn), y la dejamos como ejercicio para el lector interesado, o como lectura interesante (página 142 de [Jam], o la página 256 de [Wil]) para el lector interesado pero un poco más vago[10]. $\square$

[10]El autor no teme confesar que él caería dentro de la segunda categoría.

5.2. Metrización de espacios uniformes

Teorema 13. *Un espacio uniforme es metrizable si y sólo si está separado y tiene base numerable.*

Falta escribir.

6. Espacios compactos de Hausdorff

Teorema 14. *Si (X, τ) es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, entonces tiene una y sólo una uniformidad compatible con τ.*

Corolario 15. *Si X es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, entonces toda función continua $X \to Y$ es uniformemente continua, donde Y otro espacio topológico.*

Falta escribir.

7. Completitud

Falta escribir.

8. Espacios de proximidad

Falta escribir.

Referencias

[Adá] Jiří Adámek, Horst Herrlich, George E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*

[Dug] James Dugundji, *Topology*

[Jam] James, *Topological and Uniform Spaces*

[Jos] Joshi, *Topological Spaces*

[Lag] Elon Lages Lima, *Elementos de Topologia Geral*

[Kel] John L. Kelley, *General Topology*

[Wil] Willard, *General Topology*